Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Informatyki

Algorytm adaptywnego kolorowania porządków wzrastających

Bartłomiej Bosek

Praca Magisterska
Promotor: Prof. Paweł Idziak

Kraków, Czerwiec 2004

Streszczenie

Problem pokrycia łańcuchowego online jest problemem otwartym od ponad 15 lat. Jego wariant upgrowing, gdzie punkty przychodzące online są maksymalne w momencie dodawania, został zamknięty przez Felsnera[1]. Pokazał on dolne i górne ograniczenie $\binom{d+1}{2}$ dla posetów szerokości d. Felsner w swojej pracy postawił również problem adaptywnego pokrycia łańcuchowego posetów online upgrowing. Najlepszy znany algorytm używa $\binom{d+1}{2}$ łańcuchów dla posetów szerokości d. W tej pracy definiujemy ciekawą ze względu na powyższe problemy klasę posetów online upgrowing o względnej wysokości co najwyżej 1. Przedstawiamy algorytm adaptywnie pokrywający łańcuchami używający $d\sqrt{d}$ łańcuchów dla posetów z tej klasy o szerokości co najwyżej d. Pokażemy także, że nie istnieje algorytm online klasycznie pokrywający, który użyłby mniej niż $\binom{d+1}{2}$ łańcuchów dla posetów tej klasy o szerokości co najwyżej d.

Algorytm pokrycia łańcuchowego online przyjmuje na wejściu poset online, tzn. elementy posetu są dostarczane punkt po punkcie z pewnej zewnętrznie zdeterminowanej listy. Z każdym nowym elementem algorytm poznaje jego zależności z elementami uprzednio dostawionymi. Bazując na tej wiedzy algorytm musi dokonać nieodwołalnego przypisania nowemu elementowi łańcucha, który go pokrywa. Optymalność algorytmu online jest mierzona przez porównanie ilości użytych łańcuchów z ilością użytych łańcuchów przez optymalny algorytm offline, tzn. z szerokością posetu (klasyczne twierdzenie Dilwortha). Niech $WidthOnline(d)$ będzie największą taką liczbą, dla której istnieje strategia zmuszająca dowolny algorytm do użycia $WidthOnline(d)$ łańcuchów na porządku szerokości d. Zauważmy, że możemy dualnie zdefiniować $WidthOnline(d)$ jako najmniejszą taką liczbę, że istnieje algorytm nigdy nie używający więcej łańcuchów na porządku szerokości d. Szemeredi i Kiestead [2] pokazali, że

$$\binom{d+1}{2} \leqslant WidthOnline(d) \leqslant \frac{5^d - 1}{4}.$$

Felsner [1] przeprowadził analizę pewnego wariantu tego problemu. Nałożona tu jest restrykcja na przychodzące, nowe punkty posetu online. Muszą one być maksymalne w momencie dodania. Taki poset online nazywamy posetem upgrowing. Niech $WidthOnlineUpgr(d)$ będzie zdefiniowany analogicznie do $WidthOnline(d)$, wtedy

$$WidthOnline(d) = \binom{d+1}{2}.$$

Problem ten jest zatem zamknięty. Jednak dla posetów upgrowing rozważane jest tzw. adaptywne pokrycie łańcuchami. W tym problemie algorytm może przypisać nowo przychodzący wierzchołek wielu łańcuchom. Ponadto w trakcie dalszego działania algorytmu może usunąć z dowolnego łańcucha dowolny zbiór wierzchołków, jednak każdy punkt musi należeć do przynajmniej jednego łańcucha. W dalszej części pracy formalniej zdefiniujemy ten problem. Niech $Adaptive(d)$ będzie zdefiniowane analogicznie do poprzednich wartości, wtedy oczywiście

$$d \leqslant Adaptive(d) \leqslant WidthOnlineUpgr(d) = \binom{d+1}{2}.$$

Górne ograniczenie przenosi się natychmiast z poprzedniego problemu ponieważ każde, zwyczajne pokrycie łańcuchami jest w szczególności adaptywnym pokryciem. Oszacowanie dolne jest trywialne, wystarczy położyć d punktów w antyłańcuchu i dowolny algorytm będzie musiał użyć co najmniej d łańcuchów.

W tej pracy definiujemy ciekawą ze względu na powyższe problemy klasę posetów upgrowing o względnej wysokości co najwyżej 1. Udowodnimy, że ta podklasa posetów jest równie trudna do pokrycia łańcuchami online jak klasa wszystkich posetów upgrowing. Później przedstawimy algorytm adaptywnie pokrywający łańcuchami używający co najwyżej $d\sqrt{d}$ łańcuchów na posetach szerokości d.

Oznaczenia *Niech $(\mathcal{P}, \leqslant)$ będzie częściowym porządkiem (posetem). W dalszej części używać będziemy następujących oznaczeń. Dla dowolnych $x, y \in \mathcal{P}$*

$$\begin{aligned}
x < y &\equiv x \leqslant y \quad \& \quad x \neq y \\
x \lesseqgtr y &\equiv x \leqslant y \text{ lub } y \leqslant x \\
x \parallel y &\equiv \neg(x \leqslant y \text{ lub } y \leqslant x) \\
x \nleqslant y &\equiv \neg(x \leqslant y) \\
x \nless y &\equiv \neg(x \leqslant y) \text{ lub } x = y
\end{aligned}$$

Analogicznie definiuje się $x > y$, $x \ngeqslant y$, $x \ngtr y$. Niech $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}$, wtedy

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}\uparrow &:= \{x \in \mathcal{P} : \text{istnieje } y \in \mathcal{X} \text{ taki, że } x \geqslant y\} \\
\mathcal{X}\downarrow &:= \{x \in \mathcal{P} : \text{istnieje } y \in \mathcal{X} \text{ taki, że } x \leqslant y\} \\
\mathcal{X}\Uparrow &:= \{x \in \mathcal{P} : \text{istnieje } y \in \mathcal{X} \text{ taki, że } x > y\} \\
\mathcal{X}\Downarrow &:= \{x \in \mathcal{P} : \text{istnieje } y \in \mathcal{X} \text{ taki, że } x < y\} \\
\mathcal{A}(\mathcal{P}) &\equiv \text{rodzina wszystkich antyłańcuchów posetu } \mathcal{P} \\
width(\mathcal{P}) &:= \text{rozmiar najliczniejszego antyłańcucha w } \mathcal{P} \\
height(\mathcal{P}) &:= \text{rozmiar najliczniejszego łańcucha w } \mathcal{P}
\end{aligned}$$

Definicja 1 *Niech $\leqslant$ będzie relacją zawartą w $\mathcal{A}(\mathcal{P}) \times \mathcal{A}(\mathcal{P})$ taką, że dla dowolnych antyłańcuchów $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$*

$$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\!\uparrow .$$

Łatwo zauważyć, że $(\mathcal{A}(\mathcal{P}), \leqslant)$ jest częściowym porządkiem.

Rozważmy teraz pewne podrodziny $\mathcal{A}(\mathcal{P})$.

Definicja 2 *Antyłańcuch $\mathcal{A}$ nazwiemy antyłańcuchem maksymalnym w $\mathcal{P}$ wtw, gdy nie ma antyłańcuchów liczniejszych w $\mathcal{P}$. Innymi słowami $|\mathcal{A}| = width(\mathcal{P})$. Rodzinę takich antyłańcuchów będziemy oznaczać poprzez $\mathcal{MA}(\mathcal{P})$.*

Definicja 3 *Antyłańcuch $\mathcal{A}$ nazwiemy antyłańcuchem wysokim w $\mathcal{P}$ wtw, gdy dla dowolnego antyłańcucha $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ zachodzi $|\mathcal{B}| < |\mathcal{A}|$. Rodzinę takich antyłańcuchów będziemy oznaczać poprzez $\mathcal{HA}(\mathcal{P})$.*

W teorii częściowych porządków jednym z ciekawszych twierdzeń jest klasyczne Twierdzenie Dilworth-a rozważające antyłańcuchy maksymalne.

Twierdzenie 4 *(Dilworth) Poset $(\mathcal{MA}(\mathcal{P}), \leqslant)$ tworzy kratę.*

A więc istnieje dokładnie jeden antyłańcuch maksymalny oraz wysoki w $\mathcal{P}$.

Definicja 5 *Najwyższy w rodzinie maksymalnych antyłańcuchów w $\mathcal{P}$ oznaczymy poprzez* $\mathrm{HMA}(\mathcal{P})$.

Definicja 6 *Względną wysokością posetu $\mathcal{P}$ nazwiemy rozmiar najdłuższego łańcucha w otwartym stożku* $\mathrm{HMA}(\mathcal{P})$ *i oznaczać ją będziemy poprzez $relh(\mathcal{P})$. Bardziej formalnie*

$$relh(\mathcal{P}) := height(\mathrm{HMA}(\mathcal{P})\!\Uparrow) .$$

Do analizy naszych algorytmów wygodnie jest przypisać każdemu łańcuchowi kolor, wtedy algorytm pokrycia łańcuchowego online koloruje poset funkcją kolorującą c tak, że w dowolnym kroku dla dowolnego koloru γ zbiór $\{y \in \mathcal{P} : c(y) = \gamma\}$ jest łańcuchem. Niech $Chain(\gamma) := \{y \in \mathcal{P} : c(y) = \gamma\}$.

Okazuje się, że klasa posetów upgrowing o względnej wysokości co najwyżej 1 istotnie rozróżnia wspomniane we wstępie problemy pokrycia łańcuchowego online (kolorowania online). W Twierdzeniu 7 pokażemy strategię, która jest w zasadzie modyfikacją pomysłu Felsnera [2], wymuszającą użycie $\binom{d+1}{2}$ kolorów na posecie z naszej klasy, szerokości d. Twierdzenie 8 mówi zaś, że jeśli możemy adaptywnie kolorować (adaptywnie pokrywać łańcuchami) to dla posetów z naszej klasy, szerokości d wystarczy użyć $d\sqrt{d}$ kolorów (łańcuchów).

Twierdzenie 7 *Istnieje strategia podawania punktów wymuszająca na dowolnym algorytmie kolorującym online użycie* $\binom{d+1}{2}$ *kolorów na posecie szerokości d i względnej wysokości co najwyżej 1.*

Twierdzenie 8 *Istnieje algorytm online adaptywnie kolorujący posety online upgrowing używając* $d\sqrt{d} + O(d)$ *kolorów, gdzie d jest szerokością posetu.*

Dowód Twierdzenia 7 oparty na modyfikacji dowodu Twierdzenia 3 z pracy Felsnera [1]. Jeżeli x jest elementem maksymalnym w posecie to $private(x)$ nazwiemy, taki zbiór kolorów γ, że $maxChain(\gamma) \leqslant x$, oraz $maxChain(\gamma) \nleqslant y$ dla wszystkich elementów maksymalnych $y \neq x$. Pokażmy, że dla dowolnego k istnieje strategia podawania punktów S_k, taka że

- w każdym kroku względna wysokość nie przekracza 1, pierwsze k punktów to antyłańcuch, a potem szerokość już zawsze równa jest k;
- po jej zakończeniu, maksymalne elementy x_1, ..., x_k są takie, że $|private(x_i)| \geqslant i$.

Zbiory kolorów prywatnych elementów maksymalnych x_i są rozłączne, więc wystarczy pokazać powyższe, aby udowodnić tezę Twierdzenia 7. Dowód przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na k. Strategia S_1 generuje pojedynczy punkt. Strategię S_{k+1} można podzielić na 4 fazy.

1. Utworzenie antyłańcucha $\{x_1, ..., x_{k+1}\}$.

2. Następnie przeprowadzona jest strategia S_k w ten sposób, że każdy punkt dodany przez S_k dominuje wszystkie x_1, ..., x_k. Po zakończeniu drugiej fazy otrzymujemy $k+1$ punktów maksymalnych y_1, ..., y_k, x_{k+1}. Zauważmy, że z założenia indukcyjnego $|private(y_i)| \geqslant i$.

3. Ponownie przeprowadzana jest strategia S_k w ten sposób, że każdy punkt dodany przez S_k dominuje wszystkie y_1, ..., y_{k-1}, x_{k+1}. Otrzymujemy ponownie $k+1$ punktów maksymalnych z_1, ..., z_k, y_k, gdzie $|private(z_i)| \geqslant i$ oraz $|private(y_k)| \geqslant k$.

4. Następnie położony jest wierzchołek u nad wszystkimi elementami maksymalnymi z_1, ..., z_k, y_k. Kolor γ, którym został pokolorowany wierzchołek u nie mógł naraz należeć do $private(z_k)$ oraz $private(y_k)$. Bez straty ogólności załóżmy, że $\gamma \notin private(z_k)$, a więc $|private(u)| \geqslant k+1$. Następnie strategia przeprowadza S_k tak, że dowolny nowy punkt dominuje wszystkie z_1, ..., z_{k-1}, y_k. Ostatecznie otrzymujemy $k+1$ wierzchołków maksymalnych w_1, ..., w_k, u takich, że $|private(w_i)| \geqslant i$, oraz $|private(u)| \geqslant k+1$.

W fazie 1. poset $\mathcal{P}$ jest antyłańcuchem, zaś w fazach 2., 3., 4. z założenia indukcyjnego i konstrukcji strategii łatwo dostajemy, że $width(P) = k + 1$. Trzeba ponadto pokazać, że w każdym momencie gry poset $\mathcal{P}$ ma względną wysokość co najwyżej 1. W przypadku fazy 1. jest to oczywiste. W momencie trwania fazy 2. zdefinujmy $\mathcal{Q}$ jako zbiór punktów dodanych w tej fazie przez strategię S_k. Z założenia indukcyjnego mamy, że jeśli poset $\mathcal{Q}$ nie jest antyłańcuchem to ma szerokość k. W przypadku, gdy $width(\mathcal{Q}) < k$, czyli jest antyłańcuchem, z racji że leży bezpośrednio nad $\mathrm{HMA}(\mathcal{P}) = \{x_1, ..., x_{k+1}\}$ dostajemy natychmiast tezę. Jeśli zaś $width(\mathcal{Q}) = k$, to z faktu, że element maksymalny x_{k+1} jest nieporównywalny z dowolnym elementem z $\mathcal{Q}$ dostajemy

$$\mathrm{HMA}(\mathcal{Q} \cup \{x_{k+1}\}) = \mathrm{HMA}(\mathcal{Q}) \cup \{x_{k+1}\}$$

ale z faktu, że poset $\mathcal{Q} \cup \{x_{k+1}\}$ dominuje całkowicie resztę elementów z $\mathcal{P}$ otrzymujemy $\mathrm{HMA}(\mathcal{Q}) \cup \{x_{k+1}\} = HMA(\mathcal{P})$. Z maksymalności x_{k+1}

$$\mathrm{HMA}(\mathcal{P})\Uparrow = \mathrm{HMA}(\mathcal{Q})\Uparrow,$$

a więc

$$relh(\mathcal{P}) = relh(\mathcal{Q}) \leqslant 1,$$

co kończy dowód. Uzasadnienie dla faz 3. i 4. jest analogiczne przy czym role punktu niezależnego x_{k+1} z fazy 2. przejmą w fazach 3. i 4. odpowiednio y_k, oraz u. □

Do przeprowadzenia dowodu twierdzenia 8 potrzebujemy całej serii spostrzeżeń dotyczących własności antyłańcuchów maksymalnych i antyłańcuchów wysokich. Prostsze z nich znajdują się w poniższej uwadze. Trudniejsze przedstawiliśmy w kolejnych lematach.

Uwaga 9 *Dla dowolnych antyłańcuchów $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ są prawdziwe następujące stwierdzenia.*

$$(\mathcal{A}\uparrow)\uparrow = \mathcal{A}\uparrow \tag{1}$$

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\uparrow \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}\Uparrow \subseteq \mathcal{B}\Uparrow \tag{2}$$

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\uparrow \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}\uparrow \subseteq \mathcal{B}\uparrow \tag{3}$$

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}\uparrow \cap \mathcal{A} = \mathcal{B} \tag{4}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\Uparrow = \emptyset \quad \& \quad \mathcal{A}\Uparrow \cap \mathcal{B} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \textit{ jest antyłańcuchem} \tag{5}$$

$$height(\mathcal{A}\uparrow) = height(\mathcal{A}\Uparrow) + 1 \tag{6}$$

Dla dowolnych posetów $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ mamy

$$height(\mathcal{X}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{X} = \emptyset \tag{7}$$

$$height(\mathcal{X}) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{X} \textit{ jest antyłańcuchem} \tag{8}$$
$$height(\mathcal{X}) \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad \textit{dla } \mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X} \textit{ mamy } \mathcal{A}\Downarrow \cap \mathcal{B}\Uparrow = \emptyset \tag{9}$$
$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \quad \Rightarrow \quad height(\mathcal{X}) \leqslant height(\mathcal{Y})\,. \tag{10}$$

$(\mathcal{P}, \leqslant)$ poset;

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HMA}\,(\mathcal{X}\uparrow) \textit{ wysoki w } \mathcal{P} \tag{11}$$
$$\mathcal{A} \textit{ antyłańcuch maksymalny w } P \Rightarrow \mathcal{A}\Uparrow, \mathcal{A}, \mathcal{A}\Downarrow \textit{ podział } \mathcal{P}. \tag{12}$$

Dla podposetu $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ oraz dla dowolnego antyłańcucha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$ mamy, że

$$\mathcal{A} \textit{ wysoki w } \mathcal{P} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \textit{ wysoki w } \mathcal{Q} \tag{13}$$
$$\mathcal{A} \textit{ maksymalny w } \mathcal{P} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \textit{ maksymalny w } \mathcal{Q}. \tag{14}$$

Lemat 10 *Niech $(\mathcal{P}, \leqslant)$ wtedy zachodzi*

$$\mathcal{A} \textit{ jest wysokim antyłańcuchem w } \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\uparrow)\,.$$

Dowód Z Definicji 3 dostajemy, że dla dowolnego antyłańcucha $\mathcal{B}$, takiego że $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ mamy, że $|\mathcal{B}| < |\mathcal{A}|$. Jest to równoważne z tym, że $\mathcal{A}$ jest maksymalny w $\mathcal{A}\uparrow$. A więc $\mathcal{A}$ jest maksymalny i wysoki w $\mathcal{A}\uparrow$, czyli

$$\mathcal{A} = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\uparrow)\,.$$

W drugą stronę dowód jest oczywisty. □

Lemat 11 *Niech $(\mathcal{P}, \leqslant)$; $\mathcal{A}$ antyłańcuch maksymalny w $\mathcal{P}$; wtedy zachodzi*

$$\mathcal{A} = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\uparrow)\,.$$

Dowód Oczywisty. □

Lemat 12 *Niech $(\mathcal{P}, \leqslant)$; $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ antyłańcuchy w $\mathcal{P}$; $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$; wtedy zachodzi*

1. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\downarrow \leqslant \mathcal{B}$
2. *$(\mathcal{A} - \mathcal{B}\downarrow) \cup \mathcal{B}$ jest antyłańcuchem.*

Dowód 1. Z faktu $x \in \mathcal{B}$ oraz z $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\uparrow$ istnieje $y \in \mathcal{A}$ taki, że $y \leqslant x$. Jasnym jest, że $y \in \mathcal{B}\downarrow$, co pociąga za sobą $y \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}\downarrow$. Punkt y więc poświadcza, że $x \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\downarrow)\uparrow$. A więc $\mathcal{B} \subseteq (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\downarrow)\uparrow$ co było do udowodnienia.
2. Łatwo zauważyć, że $\mathcal{B}$ jak i $\mathcal{A} - \mathcal{B}\downarrow$ są antyłańcuchami. Zachodzi pytanie, czy $x \in \mathcal{B}$, oraz $y \in \mathcal{A} - \mathcal{B}\downarrow$ są ze sobą nieporównywalne. Dla dowodu niewprost załóżmy, że $x \gtrless y$. Gdyby $y \leqslant x$, to z faktu, że $x \in \mathcal{B}$ mielibyśmy że $y \in \mathcal{B}\downarrow$ co daje sprzeczność z $y \in \mathcal{A} - \mathcal{B}\downarrow$. Rozważmy więc przypadek, gdy $x < y$. Z racji, że $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\uparrow$, istnieje $z \in \mathcal{A}$ takie, że $z \leqslant x$. A więc $z \leqslant x < y$. Z racji, że $z < y$, gdzie $y, z \in \mathcal{A}$ dostajemy sprzeczność z faktem, że $\mathcal{A}$ jest antyłańcuchem. □

Lemat 13 *Niech* $(\mathcal{P}, \leqslant)$*;* $\mathcal{A}$ *antyłańcuch maksymalny w* $\mathcal{P}$*;* $\mathcal{B}$ *antyłańcuch w* $\mathcal{P}$*;* $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$*; wtedy zachodzi*

$$|\mathcal{B}| \leqslant |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}{\downarrow}| \, .$$

Dowód Z założeń oraz na mocy Lematu 12 dostajemy, że $(\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}) \cup \mathcal{B}$ jest antyłańcuchem. Z racji, że $\mathcal{A}$ jest antyłańcuchem maksymalnym mamy $|\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow} \cup \mathcal{B}| \leqslant |\mathcal{A}|$. Prawdziwe więc jest szacowanie

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= |((\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}) \cup \mathcal{B}) - (\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow})| = |(\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}) \cup \mathcal{B}| - |\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}| \leqslant \\ &\leqslant |\mathcal{A}| - |\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}| = |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}{\downarrow}| \, . \end{aligned}$$

$\square$

Lemat 14 *Niech* $(\mathcal{P}, \leqslant)$*;* $\mathcal{A}$ *antyłańcuch wysoki w* $\mathcal{P}$*;* $\mathcal{B}$ *antyłańcuch w* $\mathcal{P}$*;* $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{A}$*;* $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$*; wtedy zachodzi*

$$|\mathcal{B}| < |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}{\downarrow}| \leqslant |\mathcal{A}| \, .$$

Dowód Korzystając z Lematu 12 otrzymujemy, że $(\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}) \cup \mathcal{B}$ jest antyłańcuchem. Z założenia $\mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{A}$ otrzymujemy

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}) \cup \mathcal{B} \neq \mathcal{A}. \tag{15}$$

Z $(\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}) \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}{\uparrow}$, $\mathcal{A}$ wysoki w $\mathcal{P}$ i (15) dostajemy $|(\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}) \cup \mathcal{B}| < |\mathcal{A}|$. A więc

$$|\mathcal{B}| = |(\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}) \cup \mathcal{B}| - |\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}| < |\mathcal{A}| - |\mathcal{A} - \mathcal{B}{\downarrow}| = |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}{\downarrow}| \, .$$

$\square$

W Lemacie 17 wykorzystamy twierdzenie o dopasowaniu w grafach dwudzielnych. A zatem, dla przypomnienia:

Definicja 15 (X, Y, E) *nazywamy grafem dwudzielnym, gdy*

1. $X \cap Y = \emptyset$
2. $E \subseteq \{\{x, y\} \subseteq X \cup Y : x \in X, \quad y \in Y\}$.

Dla dowolnego $Z \subseteq X$ *definiujemy dodatkowo*

$$J(Z) \ := \ \{y \in Y : \ \textit{istnieje } z \in Z \textit{ taki, że } \{y, z\} \in E\} \, .$$

Twierdzenie 16 *(P. Hall) Niech* (X, Y, E) *będzie grafem dwudzielnym. Jeśli dla dowolnego* $Z \subseteq X$ *zachodzi* $|J(Z)| \geqslant |Z|$ *to istnieje* $M \subseteq E$*, takie że* $|M| = |X|$ *oraz dla dowolnych różnych* $m_1, m_2 \in M$ *mamy* $m_1 \cap m_2 = \emptyset$.

Dowód Dowód został przedstawiony w podręczniku do Analiza Kombinatorycznej [3] na stronach 193-194. □

Lemat 17 *Niech* $(\mathcal{P}, \leqslant)$*;* $\mathcal{A}$ *antyłańcuch maksymalny w* $\mathcal{P}$*;* $\mathcal{B}$ *antyłańcuch w* $\mathcal{P}$*; wtedy istnieje injekcja* ψ *taka, że*

$$\psi : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}, \text{ gdzie dla każdego } x \in \mathcal{B} \quad \psi(x) \geqslant x.$$

Dowód Zbiór $\mathcal{B}$ może częściowo leżeć nad $\mathcal{A}$, w $\mathcal{A}$, i pod $\mathcal{A}$. Wydefiniujmy więc $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ odpowiednio względem położenia $\mathcal{A}$, oraz odpowiadające im podzbiory zbioru $\mathcal{A}$.

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_1 := \mathcal{A}\Uparrow \cap \mathcal{B}, \quad \mathcal{B}_2 := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}, \quad \mathcal{B}_3 := \mathcal{A}\Downarrow \cap \mathcal{B}, \\ \mathcal{A}_1 := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1\downarrow, \quad \mathcal{A}_2 := \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{A}_3 := \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_3\uparrow .\end{gathered}$$

Z racji, że $\mathcal{A}$ jest antyłańcuchem, mamy że $\mathcal{A}\Uparrow$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\Downarrow$ są parami rozłączne. Zbiory $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ są odpowiednio podzbiorami $\mathcal{A}\Uparrow$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\Downarrow$, więc tym bardziej są parami rozłączne. Suma $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ zawiera się w $\mathcal{B}$, który jest antyłańcuchem, więc $\mathcal{B}_1\downarrow$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3\uparrow$ są także parami rozłączne. Z kolei zbiory $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ zawierają się w zbiorach $\mathcal{B}_1\downarrow$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3\uparrow$, więc także są parami rozłączne. Z maksymalności $\mathcal{A}$ w $\mathcal{P}$ i (12) otrzymujemy

$$\mathcal{A}\Uparrow \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{A}\Downarrow = \mathcal{P}.$$

Bazując więc na definicji $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ dostajemy

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = (\mathcal{A}\Uparrow \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A}\Downarrow \cap \mathcal{B}) = \mathcal{B} \cap (\mathcal{A}\Uparrow \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{A}\Downarrow) = \mathcal{B}.$$

Zdefiniujmy trzy niezależne injekcje na zbiorach $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ prowadzące odpowiednio w $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, aby później je skleić. Aby znaleźć pierwszą funkcję posłużmy się językiem grafów dwudzielnych oraz Twierdzeniem 16 (o alternacji). Zbiorem wierzchołków będzie zbiór $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1$, zaś krawędzi

$$\mathrm{E} := \{\{a, b\} \subseteq \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1 : a \in \mathcal{A}_1, \quad b \in \mathcal{B}_1 \quad \& \quad a \leqslant b\}. \tag{16}$$

Łatwo można zauważyć, że $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathrm{E})$ jest grafem dwudzielnym. Z racji, że antyłańcuch $\mathcal{A}$ ma maksymalny rozmiar, dla dowolnego antyłańcucha $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}\uparrow$ na mocy Lematu 13 mamy, że

$$|\mathcal{C}| \leqslant |\mathcal{C}\downarrow \cap \mathcal{A}|.$$

Korzystając z powyższej nierówności i linii (16) dostajemy, że dla dowolnego $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_1$ mamy

$$\begin{aligned} |J(\mathcal{C})| &= |\{a \in \mathcal{A}_1 : \ \textit{istnieje } c \in \mathcal{C} \textit{ taki, że } \{a, c\} \in \mathrm{E}\}| \\ &= |\{a \in \mathcal{A}_1 : \ \textit{istnieje } c \in \mathcal{C} \textit{ taki, że } a \leqslant c\}| \\ &= |\mathcal{C}\downarrow \cap \mathcal{A}_1| = |\mathcal{C}\downarrow \cap \mathcal{A}| \geqslant |\mathcal{C}| \end{aligned}$$

Na bazie Twierdzenia 16 mamy, że istnieje dopasowanie $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{E}$, gdzie

$$|\mathrm{M}| = |\mathcal{B}_1| \textit{ oraz dla różnych } m_1, m_2 \in M \textit{ mama, że } m_1 \cap m_2 = \emptyset \tag{17}$$

Zdefinujemy więc ψ_1 w ten sposób, że

$$\psi_1 : \mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{A}_1, \quad \textit{gdzie dla każdego } b \in \mathcal{B}_1 \quad \psi_1(b) = a \textit{ wtw } \{a, b\} \in \mathrm{M}.$$

Warto zauważyć, że z (17) dostajemy, że ψ_1 jest dobrze zdefiniowaną injekcją. Dla dowolnego $b \in \mathcal{B}_1$ para $\{\psi_1(b), b\} \in \mathrm{M} \subseteq \mathrm{E}$, a więc z (16) otrzymujemy

$$\psi_1(b) \geqslant b. \tag{18}$$

Pokazaliśmy więc istnienie injekcji prowadzącej ze zbioru $\mathcal{B}_1$ w $\mathcal{A}_1$. Wydefiniujmy zatem injekcję prowadzącą z $\mathcal{B}_2$ w $\mathcal{A}_2$.

$$\psi_2 : \mathcal{B}_2 \hookrightarrow \mathcal{A}_2, \textit{ gdzie dla każdego } b \in \mathcal{B}_2 \quad \psi_2(b) = b. \tag{19}$$

Ponieważ $\mathcal{B}_2 = \mathcal{A}_2$ to ψ_2 jest dobrze zdefiniowaną injekcją. Dla zbiorów $\mathcal{B}_3$ oraz $\mathcal{A}_3$ przeprowadzamy analogiczne rozumowanie jak dla zbiorów $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{A}_1$ dostając dobrze zdefiniowaną injekcje ψ_3.

$$\psi_3 : \mathcal{B}_3 \hookrightarrow \mathcal{A}_3, \textit{ gdzie dla każdego } b \in \mathcal{B}_3 \quad \psi_3(b) \leqslant b. \tag{20}$$

Po tym jak zdefiniowaliśmy ψ_1, ψ_2, ψ_3 przejdźmy do definicji ψ. Niech

$$\psi : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A} \qquad \psi = \psi_1 \cup \psi_2 \cup \psi_3.$$

Z racji, że ψ_1, ψ_2, ψ_3 są injekcjami o rozłącznych dziedzinach ($\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$) i obrazach ($\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$) oraz z faktu, że $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}$. otrzymujemy, że ψ jest dobrze zdefiniowaną injekcją. Na mocy (18), (19), oraz (20) dostajemy, że

$$\psi(b) \gtreqless b.$$

$\square$

Lemat 18 *Niech* $(\mathcal{P}, \leqslant)$*;* $\mathcal{A}$ *antyłańcuch wysoki w* $\mathcal{P}$*; wtedy zachodzi*

$$\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}) \leqslant \mathcal{A}.$$

Dowód Wiedząc, że $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})$ jest antyłańcuchem maksymalnym w $\mathcal{P}$ dostajemy na mocy Lematu 17 injekcję

$$\psi : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\,, \textit{ gdzie} \quad \psi(a) \gtreqless a \quad \textit{dla każdego } a \in \mathcal{A}.$$

Łatwo zauważyć, że $|\mathcal{A}| = |\psi(\mathcal{A})|$ oraz $\psi(\mathcal{A})$ jest antyłańcuchem. W zbiorze $\psi(\mathcal{A}) \cup \mathcal{A}$ nie ma większych antyłańcuchów, ponieważ jakkolwiek wybralibyśmy zbiór $|\mathcal{A}|+1$ elementowy z $\psi(\mathcal{A}) \cup \mathcal{A}$, korzystając z zasady szufladkowej, muszą znaleźć się w nim elementy a, $\psi(a)$ dla pewnego $a \in \mathcal{A}$. A więc

$$\psi(\mathcal{A}), \mathcal{A} \textit{ maksymalne w } \psi(\mathcal{A}) \cup \mathcal{A} \tag{21}$$

Z założenia, że $\mathcal{A}$ jest wysoki w $\mathcal{P}$ otrzymujemy na mocy (13)

$$\mathcal{A} \textit{ wysoki w } \psi(\mathcal{A}) \cup \mathcal{A}. \tag{22}$$

Z (21) i (22) otrzymujemy

$$\psi(\mathcal{A}) \leqslant \mathrm{HMA}\,(\psi(\mathcal{A}) \cup \mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

Pamiętając, że $\psi(A) \subseteq \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})$ mamy

$$\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}) \leqslant \psi(\mathcal{A}) \leqslant \mathcal{A}.$$

□

Lemat 19 *Niech* $(\mathcal{P}, \leqslant)$*;* $\textit{relh}(\mathcal{P}) \leqslant 1$*;* $\mathcal{A}$*,* $\mathcal{B}$ *antyłańcuchy wysokie w* $\mathcal{P}$*;* $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ *wtedy zachodzi*

$$|\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow| \quad < \quad |\mathcal{A}| - |\mathcal{B}|\,.$$

Dowód Rozpatrzmy najpierw przypadek $\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow = \emptyset$. Z $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ i $\mathcal{A}$ wysoki w $\mathcal{P}$ mamy $|\mathcal{B}| < |\mathcal{A}|$, co kończy dowód. A więc załóżmy

$$\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow \quad \neq \quad \emptyset$$

Z Lematu 18 mamy $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}) \leqslant \mathcal{A}$, czyli $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\uparrow$. Na mocy (6), (10), oraz założenia $\textit{relh}(\mathcal{P}) \leqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned} \textit{height}(\mathcal{A}\Uparrow) = \textit{height}(\mathcal{A}\uparrow) - 1 \leqslant \textit{height}(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\uparrow) - 1 = \\ = \textit{height}(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\Uparrow) \leqslant 1. \end{aligned} \tag{23}$$

A więc z $\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow \subseteq \mathcal{A}\Uparrow$ i (8) otrzymujemy, że $\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow$ jest antyłańcuchem. Weźmy dowolne $c \in \mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow$ i $b \in \mathcal{B}$. Oczywiście $b \nleqslant c$. Mamy także $c \nless b$ gdyż inaczej $\{c, b\}$ tworzyłby łańcuch dwuelementowy w $\mathcal{A}\Uparrow$, co jest niemożliwe z (23) oraz (8). Udowodniliśmy zatem, że zbiór

$$(\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow) \cup \mathcal{B} \textit{ jest antyłańcuchem.}$$

Z założenia $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ mamy $(\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow) \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\uparrow$ i $(\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow) \cup \mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{A}$. Wykorzystując zatem Lemat 14 otrzymujemy, że

$$|\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow| + |\mathcal{B}| = |\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow \cup \mathcal{B}| < |\mathcal{A}| \,.$$

□

Lematy 20 – 26 opisują dynamiczne własności posetów. Oznacza to, że rozważamy $(\mathcal{P}, \leqslant)$, który rozbudowujemy punktem x – maksymalnym w rozszerzonym posecie $\mathcal{P}^+$. Wszystkie stożki w poniższych lematach brane są względem $(\mathcal{P}^+, \leqslant)$.

Lemat 20 *Niech poset $\mathcal{P}^+$ powstaje z $\mathcal{P}$ poprzez dodanie nowego, maksymalnego punktu $x \notin \mathcal{P}$. Wtedy zachodzi*

$$\mathit{width}\,(\mathcal{P}) < \mathit{width}\left(\mathcal{P}^+\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right) = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}) \cup \{x\} \,.$$

Dowód Z własności szerokości mamy

$$\mathit{width}\left(\mathcal{P}^+\right) = \mathit{width}\,(\mathcal{P}) + 1$$

czyli istnieje antyłańcuch $\mathcal{A}$ taki, że $|\mathcal{A}| = \mathit{width}\,(\mathcal{P}) + 1$. Od razu widać, że $x \in \mathcal{A}$. Niech $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \{x\}$ mamy więc

$$|\mathcal{A}'| = |\mathcal{A}| - 1 = \mathit{width}\,(\mathcal{P}) \,. \tag{24}$$

Z faktu, że $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}$, (24), oraz własności $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})$ mamy

$$\mathcal{A}' \leqslant \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}) \,. \tag{25}$$

Teraz z faktu, że x jest maksymalny w $\mathcal{P}^+$ i (25) dostajemy

$$\{x\} \cup \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}) \ \textit{jest antyłańcuchem w}\ \mathcal{P}^+$$

ponieważ dla dowolnego $y \in \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})$ z (25) i z definicji $\mathcal{A}'$ mamy istnienie $z \in \mathcal{A}'$ takiego, że $x \parallel z \leqslant y$, czyli $y \nleqslant x$. Oczywisty jest fakt, że jest to antyłańcuch wysoki w $\mathcal{P}^+$. A więc

$$HMA(\mathcal{P}^+) = HMA(\mathcal{P}) \cup \{x\} \,.$$

□

Lemat 21 *Niech poset $\mathcal{P}^+$ powstaje z $\mathcal{P}$ poprzez dodanie nowego, maksymalnego punktu $x \notin \mathcal{P}$. Wtedy zachodzi*

$$\mathcal{A} \ \textit{jest antyłańcuchem wysokim w}\ \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{A}| = |\mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\uparrow)| \,.$$

Dowód Jeśli $x \notin \text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow)$ to oczywiście $\mathcal{A} = \text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow)$, co czyni tezę trywialną. A więc załóżmy, że

$$x \in \text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow) \tag{26}$$

Jeśli $\text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow) - \{x\} \subseteq \mathcal{A}$ to z $x \in \mathcal{A}\Uparrow$ i (26) mamy $\text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow) - \{x\} \subsetneq \mathcal{A}$, czyli

$$|\mathcal{A}| \geqslant |\text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow) - \{x\}| + 1 = |\text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow)|\,.$$

Jeśli zaś $\text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow) - \{x\} \nsubseteq \mathcal{A}$ to z $\text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow) - \{x\} \subseteq \mathcal{A}\uparrow - \{x\} \subseteq \mathcal{P}$ i założenia, że $\mathcal{A}$ jest wysoki w $\mathcal{P}$ otrzymujemy $|\mathcal{A}| > |\text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow) - \{x\}|$, czyli

$$|\mathcal{A}| \geqslant |\text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow) - \{x\}| + 1 = |\text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow)|\,.$$

A więc $|\mathcal{A}| \geqslant |\text{HMA}(\mathcal{A}\uparrow)|$. Nierówność w drugą stronę jest naturalna.

$\square$

Lemat 22 *Niech poset $\mathcal{P}^+$ powstaje z $\mathcal{P}$ poprzez dodanie nowego, maksymalnego punktu $x \notin \mathcal{P}$. Wtedy zachodzi*

$$\text{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right) \neq \text{HMA}(\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right).$$

Dowód Oczywisty. $\square$

Lemat 23 *Niech poset $\mathcal{P}^+$ powstaje z $\mathcal{P}$ poprzez dodanie nowego, maksymalnego punktu $x \notin \mathcal{P}$. Jeśli $width(\mathcal{P}) = width(\mathcal{P}^+)$ to zachodzi*

$$relh(\mathcal{P}) \leqslant 1 \quad \& \quad relh\left(\mathcal{P}^+\right) \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad height(\text{HMA}(\mathcal{P})\Uparrow) \leqslant 1.$$

Dowód Gdy $x \notin \text{HMA}(\mathcal{P}^+)$ to z Lematu 22 $\text{HMA}(\mathcal{P}^+) = \text{HMA}(\mathcal{P})$, a więc

$$height(\text{HMA}(\mathcal{P})\Uparrow) = height\Big(\text{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right)\Uparrow\Big) = relh\left(\mathcal{P}^+\right) \leqslant 1.$$

Pozostał nam przypadek

$$x \in \text{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right). \tag{27}$$

Teraz udowodnimy

$$x\Downarrow \subseteq \text{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right)\downarrow. \tag{28}$$

Łatwo zauważyć, że z $height(\text{HMA}(\mathcal{P})\Uparrow \cap \mathcal{P}) = relh(\mathcal{P}) \leqslant 1$ wynika

$$y \in \text{HMA}(\mathcal{P})\Uparrow \quad \Rightarrow \quad y \text{ maksymalny w } \mathcal{P}. \tag{29}$$

Niech $y < x$. Jeśli y nie jest maksymalny w $\mathcal{P}$ to z (29) oraz (12) otrzymujemy $y \in \text{HMA}(\mathcal{P})\downarrow$. Jeśli zaś y jest maksymalny w $\mathcal{P}$ to rozważmy dowolne

$z \in \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}^+) - \{x\} \subseteq \mathcal{P}$. Oczywiście $y \notin \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}^+) - \{x\}$, bo inaczej x, y leżałyby w antyłańcuchu $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}^+)$, a przecież $y < x$. A więc

$$z \neq y \tag{30}$$

Z maksymalności y w $\mathcal{P}$ otrzymujemy

$$y \not< z. \tag{31}$$

Natomiast z faktu $z, x \in \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}^+)$ mamy $y < x \parallel z$, czyli

$$z \not< y. \tag{32}$$

Z (30), (31), (32) otrzymujemy $z \parallel y$, czyli $(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}^+) - \{x\}) \cup \{y\}$ jest antyłańcuchem w $\mathcal{P}$. Z $\mathit{width}\,(P) = \mathit{width}\,(P^+)$ oczywiście $|(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}^+) - \{x\}) \cup \{y\}| = |\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})|$, a więc $(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}^+) - \{x\}) \cup \{y\} \leqslant \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})$, czyli

$$\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}) \subseteq \left(\left(\mathrm{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right) - \{x\}\right) \cup \{y\}\right)\!\uparrow$$

co na mocy (2) pociąga za sobą

$$\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\Uparrow \subseteq \left(\left(\mathrm{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right) - \{x\}\right) \cup \{y\}\right)\!\Uparrow$$

a więc $y \notin \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\Uparrow$, zatem na mocy (12) otrzymujemy $y \in \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\downarrow$. Udowodniliśmy zatem (28).

Z $\mathit{relh}\,(\mathcal{P}) \leqslant 1$ i (8) mamy, że $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\Uparrow - \{x\}$ jest antyłańcuchem. Z (28) oraz maksymalności x w $\mathcal{P}^+$ otrzymujemy, że $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\Uparrow = (\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\Uparrow - \{x\}) \cup \{x\}$ jest antyłańcuchem więc $\mathit{height}\,(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\Uparrow) \leqslant 1$. □

Lemat 24 *Niech poset $\mathcal{P}^+$ powstaje z $\mathcal{P}$ poprzez dodanie nowego, maksymalnego punktu $x \notin \mathcal{P}$. Przy założeniu, że $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są antyłańcuchami wysokimi w posecie $\mathcal{P}$, to*

$$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow) \leqslant \mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow).$$

Dowód Oczywiście $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \leqslant \mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow)$, tzn. $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow) \subseteq \mathcal{A}\!\uparrow$. Na mocy Lematu 18 otrzymujemy więc, że dla antyłańcucha $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow)$ wysokiego w $\mathcal{A}\!\uparrow$ zachodzi

$$\mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow) \leqslant \mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow).$$

□

Lemat 25 *Niech poset $\mathcal{P}^+$ powstaje z $\mathcal{P}$ poprzez dodanie nowego, maksymalnego punktu $x \notin \mathcal{P}$. Przy założeniu, że $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}$, gdzie $\mathcal{A}$ jest antyłańcuchem wysokim w $\mathcal{P}$, a $\mathcal{B}$ antyłańcuchem wysokim w $\mathcal{P}^+$, to*

$$\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \quad \& \quad x \in \mathcal{B}\!\Uparrow \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \text{ \textit{jest wysoki w} } \mathcal{P}^+.$$

Dowód Z założenia, że $\mathcal{B}$ jest wysoki w $\mathcal{P}^+$ na mocy Lematu 11 mamy, że $\mathcal{B} = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow)$. Wiedząc, że $x \in \mathcal{B}\!\Uparrow$ dostajemy

$$x \in \mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow)\!\Uparrow . \tag{33}$$

Z drugiej zaś strony z racji, że $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ na mocy Lematu 24 otrzymujemy, że $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow) \leqslant \mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow)$, czyli $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow) \subseteq \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow)\!\uparrow$. Pociąga to za sobą na mocy (2) w Uwadze 9 fakt, że

$$\mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow)\!\Uparrow \subseteq \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow)\!\Uparrow . \tag{34}$$

Z (33), oraz (34) otrzymujemy, że $x \in \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow)\!\Uparrow$, czyli

$$x \notin \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow) .$$

Na mocy Lematu 22 otrzymujemy więc, że $\mathcal{A} = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow)$, a to wraz z Lematem 10 daje, że $\mathcal{A}$ jest wysoki w $\mathcal{P}^+$. $\square$

Lemat 26 *Niech poset $\mathcal{P}^+$ powstaje z $\mathcal{P}$ poprzez dodanie nowego, maksymalnego punktu $x \notin \mathcal{P}$. Poza tym $relh\,(\mathcal{P}) \leqslant 1$; $relh\,(\mathcal{P}^+) \leqslant 1$; $width\,(\mathcal{P}^+) = width\,(\mathcal{P})$; oraz niech $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ będą antyłańcuchami wysokimi w $\mathcal{P}$, gdzie $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ wtedy*

1. $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow)\!\Uparrow - \mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow)\!\uparrow \;=\; (\mathcal{A}\!\Uparrow - \mathcal{B}\!\uparrow) - \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow)$
2. *jeśli dodatkowo $x \notin \mathcal{A}\!\Uparrow - \mathcal{B}\!\uparrow$ to*
   $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow)\!\Uparrow - \mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow)\!\uparrow \;=\; \mathcal{A}\!\Uparrow - \mathcal{B}\!\uparrow .$

Dowód Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy następującą notację

$$\mathcal{A}^+ := \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow)\,, \qquad \mathcal{B}^+ := \mathrm{HMA}\,(\mathcal{B}\!\uparrow)\,.$$

W tej notacji punkt 1. przyjmuje postać

$$\mathcal{A}^+\!\Uparrow - \mathcal{B}^+\!\uparrow = (\mathcal{A}\!\Uparrow - \mathcal{B}\!\uparrow) - \mathcal{A}^+. \tag{35}$$

Z racji, że $\mathcal{A}^+ = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{A}\!\uparrow) \subseteq \mathcal{A}\!\uparrow$ na mocy (2) dostajemy $\mathcal{A}^+\!\Uparrow \subseteq \mathcal{A}\!\Uparrow$, a więc także

$$\mathcal{A}^+\!\Uparrow - \mathcal{B}^+\!\uparrow \subseteq \mathcal{A}\!\Uparrow - \mathcal{B}^+\!\uparrow . \tag{36}$$

Z maksymalności x w $\mathcal{P}^+$; $width\,(\mathcal{P}) = width\,(\mathcal{P}^+)$; $relh\,(\mathcal{P}) \leqslant 1$; $relh\,(\mathcal{P}^+) \leqslant 1$ na mocy Lematu 23 otrzymujemy, że $height\,(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\Uparrow) \leqslant 1$. Z (6) dostajemy więc

$$height\,(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\uparrow) \leqslant 2. \tag{37}$$

Lemat 18 zastosowany do wysokiego antyłańcucha $\mathcal{A}$ w posecie $\mathcal{P}$ daje

$$\mathcal{A} \subseteq \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}){\uparrow}\,. \tag{38}$$

Ponieważ *width*$(\mathcal{P})$ = *width*$(\mathcal{P}^+)$ to $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})$ jest maksymalny w $\mathcal{P}^+$, a więc

$$\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}) \leqslant \mathrm{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right). \tag{39}$$

Antyłańcuch $\mathcal{B}^+$ jest wysoki w $\mathcal{P}^+$ (patrz (11)), więc Lemat 18 razem z (39) daje

$$\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}) \leqslant \mathrm{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right) \leqslant \mathcal{B}^+,$$

tzn.

$$\mathcal{B}^+ \subseteq \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}){\uparrow}\,. \tag{40}$$

Własność (9) zastosowana do (37), (38), i (40) daje

$$\mathcal{A}{\Uparrow} \cap \mathcal{B}^+{\Downarrow} = \emptyset. \tag{41}$$

Potrzebna nam jest jeszcze teorio–mnogościowa własność

$$(X - Y) - (X - Z) = X \cap (Z - Y). \tag{42}$$

Możemy zatem, przeprowadzić następujące rozumowanie

$$\begin{array}{rcll}
(\mathcal{A}{\Uparrow} - \mathcal{B}^+{\uparrow}) - (\mathcal{A}{\Uparrow} - \mathcal{B}{\uparrow}) & = & \mathcal{A}{\Uparrow} \cap (\mathcal{B}{\uparrow} - \mathcal{B}^+{\uparrow}) & \text{z (42)} \\
 & = & \mathcal{A}{\Uparrow} \cap (\mathcal{B}{\uparrow} \cap \mathcal{B}^+{\Downarrow}) & \begin{array}{l}\text{z (12) oraz} \\ \text{z maks. } \mathcal{B}^+ \text{ w } \mathcal{B}{\uparrow}\end{array} \\
 & \subseteq & \mathcal{A}{\Uparrow} \cap \mathcal{B}^+{\Downarrow} & \\
 & = & \emptyset & \text{z (41)}
\end{array}$$

Czyli

$$\mathcal{A}{\Uparrow} - \mathcal{B}^+{\uparrow} \subseteq \mathcal{A}{\Uparrow} - \mathcal{B}{\uparrow}\,. \tag{43}$$

Teraz

$$\begin{array}{rcll}
\mathcal{A}^+{\Uparrow} - \mathcal{B}^+{\uparrow} & = & (\mathcal{A}^+{\Uparrow} - \mathcal{B}^+{\uparrow}) - \mathcal{A}^+ & \\
 & \subseteq & (\mathcal{A}{\Uparrow} - \mathcal{B}^+{\uparrow}) - \mathcal{A}^+ & \text{z (36)} \\
 & \subseteq & (\mathcal{A}{\Uparrow} - \mathcal{B}{\uparrow}) - \mathcal{A}^+. & \text{z (43)}
\end{array}$$

Dla inkluzji w drugą stronę zauważmy najpierw, że podobnie do (40) możemy pokazać

$$\mathcal{A}^+ \subseteq \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}){\uparrow}, \tag{44}$$

a stosując (9) do (38), (44), i (37) otrzymujemy

$$\mathcal{A}{\Uparrow} \cap \mathcal{A}^+{\Downarrow} = \emptyset. \tag{45}$$

Pamiętając, że $\mathcal{A}^+$ jest maksymalny w $\mathcal{A}\uparrow$, z (45) i (12) , otrzymujemy

$$\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{A}^+\uparrow = \mathcal{A}\Uparrow \cap (\mathcal{A}\uparrow - \mathcal{A}^+\uparrow) = \mathcal{A}\Uparrow \cap \mathcal{A}\uparrow \cap \mathcal{A}^+\Downarrow = \mathcal{A}\Uparrow \cap \mathcal{A}^+\Downarrow = \emptyset,$$

czyli

$$\mathcal{A}\Uparrow \subseteq \mathcal{A}^+\uparrow\ . \tag{46}$$

Ponadto (3) zastosowana do $\mathcal{B}^+ \subseteq \mathcal{B}\uparrow$ daje

$$\mathcal{B}^+\uparrow \subseteq \mathcal{B}\uparrow\ . \tag{47}$$

Z (46), oraz (47) mamy

$$(\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow) - \mathcal{A}^+ \subseteq (\mathcal{A}^+\uparrow - \mathcal{B}\uparrow) - \mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^+\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow \subseteq \mathcal{A}^+\Uparrow - \mathcal{B}^+\uparrow, \tag{48}$$

czyli drugą inkluzję potrzebną dla zakończenia dowodu punktu 1.

Dla dowodu 2. zauważmy, że możemy założyc dodatkowo, iż $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}^+$, bo inaczej 2. jest oczywista jako że $\mathcal{A}^+ \cap \mathcal{A}\Uparrow = \emptyset$. W tej sytuacji pokażemy tylko, że $(\mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow) \cap \mathcal{A}^+ = \emptyset$, co i tak wystarczy do dowodu 2. Lemat 22 wraz z $x \in \mathcal{A}^+$ i założeniem $x \notin \mathcal{A}\Uparrow - \mathcal{B}\uparrow$ daje

$$x \in \mathcal{B}\uparrow\ . \tag{49}$$

Lemat 21 zastosowany do antyłańcucha $\mathcal{B}$ wysokiego w $\mathcal{P}$ daje, że $\mathcal{B}$ jest maksymalny w $\mathcal{B}\uparrow$. Korzystając z Lematu 13 zastosowanym do antyłańcucha maksymalnego $\mathcal{B}$ w $\mathcal{B}\uparrow$ i dominującego go antyłańcucha $\mathcal{A}^+ \cap \mathcal{B}\uparrow$, dostajemy

$$\left|\mathcal{A}^+ \cap \mathcal{B}\uparrow\right| \leqslant \left|\left(\mathcal{A}^+ \cap \mathcal{B}\uparrow\right)\downarrow \cap \mathcal{B}\right| \leqslant \left|\mathcal{A}^+ \cap \mathcal{B}\right|, \tag{50}$$

a zatem

$$\begin{array}{rcll} |\mathcal{A}| & \leqslant & |\mathcal{A}^+| & \text{z maks. } \mathcal{A}^+ \text{ w } \mathcal{A}\uparrow \\ & = & |(\mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\uparrow) \cup (\mathcal{A}^+ \cap \mathcal{B}\uparrow)| & \\ & = & |\mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\uparrow| + |\mathcal{A}^+ \cap \mathcal{B}\uparrow| & \\ & \leqslant & |\mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\uparrow| + |\mathcal{A}^+\downarrow \cap \mathcal{B}| & \text{z (50)} \\ & = & |(\mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\uparrow) \cup (\mathcal{A}^+\downarrow \cap \mathcal{B})|\,. & \end{array} \tag{51}$$

Zauważmy, że (49) i $x \notin \mathcal{B}$ oznacza, że antyłańcuchy $\mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\uparrow$ i $\mathcal{A}^+\downarrow \cap \mathcal{B}$ są zawarte w $\mathcal{P}$. Aby pokazać, że ich suma też jest antyłańcuchem, weźmy $y \in \mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\uparrow$ i $z \in \mathcal{A}^+\downarrow \cap \mathcal{B}$. Zbiory te są rozłączne a więc $y \neq z$. Z faktów $y \in \mathcal{A}^+$, oraz $z \in \mathcal{A}^+\downarrow$ otrzymujemy $y \not< z$, a z $y \notin \mathcal{B}\uparrow$, oraz $z \in \mathcal{B}$ mamy $y \not> z$. A więc $y \parallel z$ co wraz z (51) dowodzi, że

$$\left(\mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\uparrow\right) \cup \left(\mathcal{A}^+\downarrow \cap \mathcal{B}\right) \ \textit{jest antyłańcuchem w } \mathcal{P}. \tag{52}$$

Z kolei $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{A}^+$ i $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ daje

$$\mathcal{A} \leqslant \Big(\mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\!\uparrow\Big) \cup \Big(\mathcal{A}^+\!\!\downarrow \cap \mathcal{B}\Big). \tag{53}$$

Ponieważ $\mathcal{A}$ jest antyłańcuchem wysokim w $\mathcal{P}$ zdominowanym (patrz (53)) przez conajmniej tak liczny (patrz (51)) jak $\mathcal{A}$ antyłańcuch $(\mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\!\uparrow) \cup (\mathcal{A}^+\!\!\downarrow \cap\mathcal{B})$, to Lemat 14 daje

$$\Big(\mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\!\uparrow\Big) \cup \Big(\mathcal{A}^+\!\!\downarrow \cap \mathcal{B}\Big) \subseteq \mathcal{A}.$$

W szczególności $\mathcal{A}^+ - \mathcal{B} \uparrow \subseteq \mathcal{A}$, co natychmiast daje $(\mathcal{A}\!\Uparrow - \mathcal{B}\!\uparrow) \cap \mathcal{A}^+ = (\mathcal{A}^+ - \mathcal{B}\!\uparrow) \cap \mathcal{A}\!\Uparrow = \emptyset$. $\square$

Oprócz powyższych lematów do dowodu poprawności zaprezentowanego później algorytmu potrzebna nam będzie formalna definicja adaptywnego kolorowania online.

Definicja 27 *Kolorowaniem posetu $\mathcal{P}$ nazwiemy dowolną funkcję c przypisującą punktom z $\mathcal{P}$ pewne zbiory kolorów, tak by*

- $c(y) \neq \emptyset \quad$ *dla* $\quad y \in \mathcal{P}$,
- *dla dowolnego koloru γ zbiór $Chain(\gamma) := \{y \in \mathcal{P} : \gamma \in c(y)\}$ jest łańcuchem w $\mathcal{P}$.*

Gdy teraz poset $\mathcal{P}$ jest rozbudowany nowym, maksymalnym punktem do $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{x\}$ to kolorowanie c^+ posetu $\mathcal{P}^+$ powstaje poprzez modyfikacje kolorowania c z zachowaniem poprzednich reguł z podstawieniem c^+ w miejsce c tzn.

a. $c^+(y) \neq \emptyset \quad$ *dla* $\quad y \in \mathcal{P}^+$,

b. *dla dowolnego koloru γ zbiór $Chain^+(\gamma) := \{y \in \mathcal{P}^+ : \gamma \in c^+(y)\}$ jest łańcuchem w $\mathcal{P}^+$*

oraz z dodatkowym wymaganiem zgodności c^+ z c tzn.

c. $c^+(y) \subseteq c(y)$ *dla dowolnego $y \in \mathcal{P}$.*

Możemy nareszcie przedstawić algorytm dowodzący Twierdzenia 8. Będzie on podczas działania utrzymywać pewną strukturę $\mathbb{S}$ zależną od aktualnego posetu $\mathcal{P}$ i jego kolorowania c. Kiedy $\mathcal{P}$ rozbudowuje się do $\mathcal{P}^+$ poprzez dodanie nowego, maksymalnego punktu x, algorytm konstruuje nową strukturę $\mathbb{S}^+$ dla $\mathcal{P}^+$. Gdy $\mathbb{S}^+$ zostanie skonstruowana można będzie z niej odczytać nowe, poprawne kolorowanie dla $\mathcal{P}^+$. Poniższe niezmienniki podają własności struktury $\mathbb{S}$.

Niezmienniki. $\mathbb{S}$ jest krotką $(\mathcal{P}, \leqslant, k, \mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_k, \Gamma_1, ..., \Gamma_k, \lambda_1, ..., \lambda_k, c)$, gdzie

N1a: $\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_k$ są antyłańcuchami wysokimi w $\mathcal{P}$;

N1b: $\mathcal{L}_1 \leqslant ... \leqslant \mathcal{L}_k$;

N1c: $|\mathcal{L}_1| = width\,(\mathcal{P})$;

N1d: $|\mathcal{L}_i| - |\mathcal{L}_{i+1}| = i + 1$ dla $i = 1, ..., k - 1$;

N1e: $|\mathcal{L}_k| \leqslant k + 1$;

N2a: $\Gamma_1, ..., \Gamma_k$ są parami rozłącznymi zbiorami kolorów;

N2b: $\lambda_i : \mathcal{L}_i \longrightarrow \Gamma_i$ jest bijekcją dla $i = 1, ..., k$;

N2c: dla $i = 1, ..., k$ oraz $y \in \mathcal{L}_i$ zachodzi $\quad top\,(\lambda_i(y)) \leqslant y$
gdzie dla koloru $\gamma \quad top\,(\gamma) := max \left\{ Chain\,(\gamma) \cap \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i{\downarrow} \right\}$;

N3: dla $i = 1, ..., k$ oraz $y \in \mathcal{L}_i{\Uparrow} - \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow}$
istnieje funkcja $ind^y : \mathcal{L}_i \cap y{\Downarrow} \longrightarrow \{1, ..., i\}$ taka, że
$c(y) = \left\{ \lambda_{ind^y(z)}(z) : z \in \mathcal{L}_i \cap y{\Downarrow} \right\}$

N4: c jest adaptywnym kolorowaniem online posetu $\mathcal{P}$ kolorami z $\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$.

Niezmiennik N4 w istocie rozbija się na trzy warunki N4a, N4b, N4c zgodnie z definicją adaptywnego kolorowania. Kilka, ważnych dla nas dalej, konsekwencji faktu, że struktura $\mathbb{S}$ spełnia niektóre spośród niezmienników opisane są w Faktach 1 – 6. Dodatkowo dla $i = 1, ..., k$ będziemy używać notacji

$$\mathcal{C}_i := \mathcal{L}_i{\Uparrow} - \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow},$$

gdzie zbiór $\mathcal{L}_{k+1} := \emptyset$ nie wchodzi w skład struktury $\mathbb{S}$, a powołany jest jedynie dla uproszczenia niektórych zapisów.

Fakt 1 *N1a, N1c dla $\mathbb{S}$ daje*

$$\mathcal{L}_1 \quad = \quad \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\,.$$

Fakt 2 *N1a, N1b, N1c dla $\mathbb{S}$ daje*

$$\mathcal{C}_i{\Downarrow} \cap \mathcal{L}_i \quad \subseteq \quad \bigcap_{j=1}^{i} \mathcal{L}_j - \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow} \qquad \textit{dla dowolnego } i = 1, ..., k$$

Fakt 3 *N1a, N1b, N1c dla $\mathbb{S}$ daje, że $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_k, \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i{\downarrow} \right)$ tworzą podział $\mathcal{P}$*

Fakt 4 *N1b dla* $\mathbb{S}$ *daje*

$$(\mathcal{C}_i\Downarrow \cap \mathcal{L}_i) \cap (\mathcal{C}_j\Downarrow \cap \mathcal{L}_j) \quad = \quad \emptyset \qquad dla\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant k$$

Fakt 5 *N2a, N2b dla* $\mathbb{S}$ *daje*
dla dowolnych $i, j = 1, ..., k; \quad u \in \mathcal{L}_i, \quad w \in \mathcal{L}_j$

$$\lambda_i(u) = \lambda_j(w) \quad \Leftrightarrow \quad i = j \quad \& \quad u = w$$

Fakt 6 *N1a, N1b, N1c, N2a, N2b, N3 dla* $\mathbb{S}$ *daje*
dla $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$

$$c\,(\mathcal{C}_i) \cap \bigcup_{l=1}^{j} \lambda_l \left(\bigcap_{m=1}^{j} \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_{j+1}\uparrow \right) = \emptyset$$

Dowód Fakt 1. Z N1a i N1c i Definicji 5 otrzymujemy tezę. □
Dowód Fakt 2. W świetle definicji $\mathcal{C}_i$ mamy $(\mathcal{L}_i \cap \mathcal{C}_i\Downarrow) \cap \mathcal{L}_{i+1}\uparrow = \emptyset$, więc wystarczy pokazać, że dla $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant k$

$$\mathcal{L}_i \cap \mathcal{C}_i\Downarrow \subseteq \mathcal{L}_j.$$

Oczywiście dla $y \in \mathcal{L}_i \cap \mathcal{C}_i\Downarrow$ istnieje $z \in \mathcal{C}_i$ takie, że $y < z$. Z N1b otrzymujemy $\mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{L}_j\uparrow$, czyli istnieje $u \in \mathcal{L}_j$ takie, że $u \leqslant y < z$. Z Faktu 1 i N1b wiemy, że $u, y, z \in \mathcal{L}_1\uparrow = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\uparrow$, a więc z $height(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\uparrow) = relh\,(\mathcal{P}) + 1 \leqslant 2$ otrzymujemy $u = y$, czyli $y \in \mathcal{L}_j$. □
Dowód Fakt 3. Dla dowodu

$$\mathcal{P} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i\downarrow \right) \tag{54}$$

weźmy dowolne $y \in \mathcal{P}$. Z Faktu 1 i (12) otrzymujemy

$$y \in \mathcal{L}_1\Uparrow \quad lub \quad y \in \mathcal{L}_1\downarrow .$$

Jeśli $y \in \mathcal{L}_1\downarrow$ tezę mamy za darmo. Podobnie (54) jest oczywiste jeśli $y \in \mathcal{L}_i$ dla jakiegoś $i = 1, ..., k$. Jeśli zaś $y \notin \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i$ rozważmy $j := max\,\{i = 1, ..., k : y \in \mathcal{L}_i\Uparrow\}$, tzn $y \in \mathcal{L}_j\Uparrow - \mathcal{L}_{j+1}\Uparrow$. Ponieważ $y \notin \mathcal{L}_{j+1}$, to $y \in \mathcal{C}_j$, a więc

$$\mathcal{P} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i\downarrow \right).$$

Zawieranie w drugą stronę jest oczywiste.

Dla dowodu
$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i{\downarrow}\right) = \emptyset$$
załóżmy, że $y \in \mathcal{C}_i = \mathcal{L}_i{\Uparrow} - \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow}$. Pokażmy, że $y \notin \mathcal{L}_j{\downarrow}$ dla $j = 1, ..., k$. Oczywiście $y \notin \mathcal{L}_i{\downarrow}$. Dla $j < i$ z N1b otrzymujemy $\mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{L}_j{\uparrow}$. Z (2) mamy $y \in \mathcal{L}_i{\Uparrow} \subseteq \mathcal{L}_j{\Uparrow}$, czyli $y \notin \mathcal{L}_j{\downarrow}$. Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy $i \leqslant j$. Wiemy z N1b, (2), oraz Faktu 1, że $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{L}_i{\Uparrow} \subseteq \mathcal{L}_1{\Uparrow} = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}){\Uparrow}$. Z faktu, że $\mathit{height}(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P}){\Uparrow}) = \mathit{relh}(\mathcal{P}) \leqslant 1$ otrzymujemy, że $\mathcal{C}_i$ jest zbiorem elementów maksymalnych w $\mathcal{P}$. W takim razie dla uzasadnienia $y \notin \mathcal{L}_j{\downarrow}$ wystarczy pokazać, że $y \notin \mathcal{L}_j$. Znów z N1b $\mathcal{L}_j \subseteq \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow}$, oraz z faktu, że $y \notin \mathcal{L}_{i+1}$ mamy, że $y \notin \mathcal{L}_j$.

Aby pokazać rozłączność $\mathcal{C}_i$ z $\mathcal{C}_j$ dla $1 \leqslant i < j \leqslant k$ wystarczy zauważyć, że na mocy N1b otrzymujemy $\mathcal{C}_j \subseteq \mathcal{L}_j{\uparrow} \subseteq \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow}$. Z rozłączności $\mathcal{C}_i$ z $\mathcal{L}_{i+1}{\uparrow}$ dostajemy natychmiast pożądany fakt. □

Dowód Fakt 4. Łatwo zauważyć, że dla dowolnego $i = 1, ..., k$
$$\mathcal{C}_i{\Downarrow} \cap \mathcal{L}_i = (\mathcal{L}_i{\Uparrow} - \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow}){\Downarrow} \cap \mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow}\ . \tag{55}$$
Bez straty straty ogólności możemy założyć, że $i < j$. Wtedy z N1b $\mathcal{L}_j \subseteq \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow}$, a więc z (55) dostajemy
$$(\mathcal{C}_i{\Downarrow} \cap \mathcal{L}_i) \cap (\mathcal{C}_j{\Downarrow} \cap \mathcal{L}_j) \subseteq (\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow}) \cap (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_{j+1}{\uparrow}) = \emptyset.$$
□

Dowód Fakt 5. Z N2a i N2b, czyli z rozłączności dziedzin i obrazów, oraz z faktu, że $\lambda_1, ..., \lambda_k$ są bijekcjami natychmiastowo otrzymujemy tezę. □

Dowód Fakt 6. Z Faktu 2 dla dowolnego i mamy $\mathcal{C}_i{\Downarrow} \cap \mathcal{L}_i \subseteq \bigcap_{j=1}^{i} \mathcal{L}_j$, a więc zbiór $\mathcal{C}_i{\Downarrow} \cap \mathcal{L}_i$ zawiera się w dziedzinach funkcji $\lambda_1, ..., \lambda_i$. Zatem
$$\begin{aligned}
c(\mathcal{C}_i) &= \textstyle\bigcup_{y \in \mathcal{C}_i} c(y) \\
&= \textstyle\bigcup_{y \in \mathcal{C}_i} \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap y{\Downarrow}} \left\{\lambda_{\mathit{ind}^y(z)}(z)\right\} && \text{z N3} \\
&\subseteq \textstyle\bigcup_{y \in \mathcal{C}_i} \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap y{\Downarrow}} \bigcup_{l=1}^{i} \{\lambda_l(z)\} && \text{z N3} \\
&= \textstyle\bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap \mathcal{C}_i{\Downarrow}} \bigcup_{l=1}^{i} \{\lambda_l(z)\} \\
&= \textstyle\bigcup_{l=1}^{i} \lambda_l\,(\mathcal{L}_i \cap \mathcal{C}_i{\Downarrow}) \\
&\subseteq \textstyle\bigcup_{l=1}^{i} \lambda_l\left(\bigcap_{m=1}^{i} \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_{i+1}{\uparrow}\right) && \text{z Faktu 2}
\end{aligned} \tag{56}$$

Z dowodu Faktu 4 mamy $(\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_{i+1}\uparrow) \cap (\mathcal{L}_j - \mathcal{L}_{j+1}\uparrow) = \emptyset$, a więc

$$\bigcap_{l=1}^{i} \mathcal{L}_l - \mathcal{L}_{i+1}\uparrow \cap \bigcap_{m=1}^{j} \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_{j+1}\uparrow = \emptyset.$$

A zatem z Faktu 5 otrzymujemy

$$\bigcup_{l=1}^{i} \lambda_l \left(\bigcap_{m=1}^{i} \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_{j+1}\uparrow \right) \cap \bigcup_{n=1}^{j} \lambda_n \left(\bigcap_{p=1}^{j} \mathcal{L}_p - \mathcal{L}_{j+1}\uparrow \right) = \emptyset. \tag{57}$$

Z (56) i (57) mamy $c(\mathcal{C}_i) \cap \bigcup_{l=1}^{j} \lambda_l \left(\bigcap_{m=1}^{j} \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_{j+1}\uparrow \right) = \emptyset$. $\square$

Zaprezentowany niżej algorytm wraz z nadejściem nowego, maksymalnego punktu x jedynie aktualizuje strukturę $\mathbb{S} = (\mathcal{P}, \leqslant, k, \mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_k, \Gamma_1, ..., \Gamma_k, \lambda_1, ..., \lambda_k, c)$ dla posetu $\mathcal{P}$ do struktury $\mathbb{S}^+ = (\mathcal{P}^+, \leqslant^+, k^+, \mathcal{L}_1^+, ..., \mathcal{L}_k^+, \Gamma_1^+, ..., \Gamma_k^+, \lambda_1^+, ..., \lambda_k^+, c^+)$ dla posetu $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{x\}$. W szczególności N4 mówi, że w każdym kroku struktura $\mathbb{S}$ opisuje poprawne kolorowanie posetu $\mathcal{P}$, a dokonane na samym końcu szacowanie $\left|\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i\right|$ pokaże, że algorytm w każdym momencie używa nie więcej niż $d\sqrt{d}+O(d)$ kolorów. Podobnie, jak w Lematach 20 – 26 tak i w dalszej części pracy wszystkie stożki brane są względem $\mathcal{P}^+$. W szczególności, teraz $\mathcal{C}_i = \mathcal{L}_i\Uparrow - \mathcal{L}_{i+1}\uparrow$ również odnosi się do $\mathcal{P}^+$.

ALGORYTM:

if $\;width(\mathcal{P}) < width\left(\mathcal{P}^+\right)$ **then** **Przypadek A** (A1)

if $\;width(\mathcal{P}) = width\left(\mathcal{P}^+\right)$ **then** **begin** (A2)

  $i_0 := max\{i \in \mathbb{N} : x \in \mathcal{C}_i\}$ (A3)

  if $\mathcal{L}_{i_0}$ *jest wysoki w* $\mathcal{P}^+$ **then** **Przypadek B** (A4)

  else **Przypadek C** (A5)

end

Przypadek A

//γ_1, ..., γ_{k+1} są nowymi kolorami nigdy wcześniej niewystępującymi

for $i := 1$ **to** k **do** **begin**

  $\mathcal{L}_i^+ := \mathcal{L}_i \cup \{x\}$ (A6)

  $\Gamma_i^+ := \Gamma_i \cup \{\gamma_i\}$ (A7)

  $\lambda_i^+ := \lambda_i \cup \{(x, \gamma_i)\}$ (A8)

end

if $|\mathcal{L}_k| = k+1$ **then begin**

$$k^+ := k+1 \tag{A9}$$

$$\mathcal{L}^+_{k+1} := \{x\} \tag{A10}$$

$$\Gamma^+_{k+1} := \{\gamma_{k+1}\} \tag{A11}$$

$$\lambda^+_{k+1} : \{x\} \longrightarrow \{\lambda_{k+1}\} \tag{A12}$$

end

else $k^+ := k$ (A13)

$$c^+|_{\mathcal{P}} := c \tag{A14}$$

$$c^+(x) := \{\gamma_1\} \tag{A15}$$

Przypadek B

$$k^+ := k \tag{A16}$$

for $i := 1$ **to** k **do begin**

$$\mathcal{L}^+_i := \mathcal{L}_i \tag{A17}$$

$$\Gamma^+_i := \Gamma_i \tag{A18}$$

$$\lambda^+_i := \lambda_i \tag{A19}$$

end

$$c^+|_{\mathcal{P}} := c \tag{A20}$$

$$c^+(x) := \left\{ repr\left(\left(\bigcup_{i=1}^{i_0} \{\lambda_i\,(y)\} \right) - c\,(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\}) \right) : y \in (x{\Downarrow} \cap \mathcal{L}_{i_0}) \right\} \tag{A21}$$

//Funkcja repr() zwraca dla niepustego zbioru jakikolwiek jeden
//z jego elementów. Wymagany dowód niepustości argumentu tej
//funkcji będzie przytoczony później.

Przypadek C

//Dla uproszczenia algorytmu i przejrzystości dowodu Przypadek C
//jest podzielony na dwie części. Najpierw konstruujemy nową
//strukturę $\overline{\mathbb{S}} = (\mathcal{P}, \leqslant, k, \mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_k, \overline{\Gamma}_1, ..., \overline{\Gamma}_k, \overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_k, c)$ *dla* $\mathcal{P}$,
//aby później na jej bazie stworzyć $\mathbb{S}^+$ *dla* $\mathcal{P}^+$.
//Generacja $\overline{\mathbb{S}}$ *dla* $\mathcal{P}$:

for $i := 1$ **to** k **do** *wybierz bijekcję*

$$\psi_i : \mathcal{L}_i \longrightarrow \mathrm{HMA}\,(\mathcal{L}_i{\uparrow})\,,\ \textit{taką że}\ y \leqslant \psi_i(y)\ \textit{dla}\ y \in \mathcal{L}_i \tag{A22}$$

for $i := 1$ **to** i_0 **do**

$$\Delta_i := \{y \in \mathcal{L}_{i_0} \cap \mathcal{C}_{i_0}{\Downarrow} :\ \psi_{i_0}(y) \in \mathcal{C}_{i_0}\ \&\ \lambda_i(y) \in c(\psi_{i_0}(y))\} \tag{A23}$$

$$\textbf{for} \quad i := 1 \quad \textbf{to} \quad i_0 - 1 \quad \textbf{do} \quad \overline{\Gamma}_i := \Gamma_i - \lambda_i(\Delta_i) \cup \lambda_{i_0}(\Delta_i) \tag{A24}$$

$$\overline{\Gamma}_{i_0} := \left(\Gamma_{i_0} - \bigcup_{i=1}^{i_0} \lambda_{i_0}(\Delta_i)\right) \cup \bigcup_{i=1}^{i_0} \lambda_i(\Delta_i) \tag{A25}$$

$$\textbf{for} \quad i := i_0 + 1 \quad \textbf{to} \quad k \quad \textbf{do} \quad \overline{\Gamma}_i := \Gamma_i \tag{A26}$$

$$\textbf{for} \quad i := 1 \quad \textbf{to} \quad i_0 - 1 \quad \textbf{do} \quad \overline{\lambda}_i := \lambda_i|_{\mathcal{L}_i - \Delta_i} \cup \lambda_{i_0}|_{\Delta_i} \tag{A27}$$

$$\overline{\lambda}_{i_0} := \lambda_{i_0}|_{\mathcal{L}_{i_0} - \bigcup_{i=1}^{i_0} \Delta_i} \cup \bigcup_{i=1}^{i_0} \lambda_i|_{\Delta_i} \tag{A28}$$

$$\textbf{for} \quad i := i_0 + 1 \quad \textbf{to} \quad k \quad \textbf{do} \quad \overline{\lambda}_i := \lambda_i \tag{A29}$$

//Teraz na podstawie $\overline{\mathbb{S}}$ dla $\mathcal{P}$ algorytm tworzy $\mathbb{S}^+$ dla $\mathcal{P}^+$:

$$k^+ := k \tag{A30}$$

for $i := 1$ **to** k **do** **begin**

$$\mathcal{L}_i^+ := \mathrm{HMA}(\mathcal{L}_i\!\uparrow) \tag{A31}$$

$$\Gamma_i^+ := \overline{\Gamma}_i \tag{A32}$$

$$\lambda_i^+ := \lambda_i \circ \psi_i^{-1} \tag{A33}$$

end

//Fakt 3 pozwala rozbić defincję c^+ na następujące przypadki

$$\textbf{for all} \quad y \in \mathcal{C}_{i_0} \cap \mathrm{HMA}(\mathcal{L}_{i_0}\!\uparrow) \quad \textbf{do} \quad c^+(y) := \left\{\overline{\lambda}_{i_0}(\psi_{i_0}^{-1}(y))\right\} \tag{A34}$$

for all $y \in \mathcal{C}_{i_0} - \mathrm{HMA}(\mathcal{L}_{i_0}\!\uparrow)$ **do**

$$c^+(y) := c(y) \cap \bigcup_{j=1}^{i_0} \overline{\lambda}_j(\mathcal{C}_{i_0}\!\Downarrow \cap \mathrm{HMA}(\mathcal{L}_{i_0}\!\uparrow)) \tag{A35}$$

for all $i \neq i_0$ **and** $y \in \mathcal{C}_i$ **do**

$$c^+(y) := c(y) \cap \bigcup_{j=1}^{i_0} \overline{\lambda}_j(\mathcal{C}_i\!\Downarrow \cap \mathrm{HMA}(\mathcal{L}_i\!\uparrow)) \tag{A36}$$

$$\textbf{for all} \quad y \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i\!\downarrow \quad \textbf{do} \quad c^+(y) := c(y) \tag{A37}$$

Dowód poprawności algorytmu przeprowadzimy oczywiście oddzielnie dla każdego przypadku.

Dowód przypadku A.
Dowód N1a. W tym przypadku punkt x poszerzył poset, a więc

$$\mathit{width}\left(\mathcal{P}^+\right) = \mathit{width}(\mathcal{P}) + 1.$$

Z Lematów 20 i 11 otrzymujemy

$$\mathrm{HMA}\left(\mathcal{P}^+\right) = \mathrm{HMA}(\mathcal{P}) \cup \{x\} = \mathcal{L}_1 \cup \{x\}$$

czyli $\mathcal{L}_1 \cup \{x\}$ jest antyłańcuchem, a zatem

$$x \notin \mathcal{L}_1\uparrow . \tag{58}$$

Bezpośrednio z N1b. dla $\mathbb{S}$ wynika, że $\mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{L}_1\uparrow$. Z (3) mamy $\mathcal{L}_i\uparrow \subseteq \mathcal{L}_1\uparrow$, co razem z (58) daje

$$x \notin \mathcal{L}_i\uparrow \quad \textit{dla dowolnego } i = 1, ..., k. \tag{59}$$

Korzystając z N1a. dla $\mathbb{S}$, (59), oraz maksymalności x w $\mathcal{P}^+$ otrzymujemy

$$\mathcal{L}_i^+ = \mathcal{L}_i \cup \{x\} = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{L}_i\uparrow) \cup \{x\} = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{L}_i\uparrow \cup \{x\}) = \mathrm{HMA}\left(\mathcal{L}_i^+\uparrow\right).$$

Co na mocy Lematu 10 implikuje N1a.

Dowód N1b. Korzystając z (N1b) dla $\mathbb{S}$, maksymalności x w $\mathcal{P}^+$ dla dowolnego i=1, ..., k-1

$$\mathcal{L}_{i+1}^+ = \mathcal{L}_{i+1} \cup \{x\} \subseteq \mathcal{L}_i\uparrow \cup \{x\} = (\mathcal{L}_i \cup \{x\})\uparrow = \mathcal{L}_i^+\uparrow .$$

Dowód N1c, N1d, N1e, N2a, N2b, N2c, N3, N4. Oczywisty.

Dowód przypadku B.
Dowód N1a. Dla dowolnego $i = i_0 + 1, ..., k$ mamy $x \notin \mathcal{L}_i\uparrow$, więc

$$\mathcal{L}_i^+ = \mathcal{L}_i = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{L}_i\uparrow) = \mathrm{HMA}\left(\mathcal{L}_i^+\uparrow\right).$$

Dla $i = i_0$ otrzymujemy natychmiast z (A4)

$$\mathcal{L}_{i_0}^+ = \mathcal{L}_{i_0} \textit{ jest wysoki w } \mathcal{P}^+. \tag{60}$$

Ustalmy $i = 1, ..., i_0 - 1$. Z (A3) mamy $x \in \mathcal{L}_{i_0}\Uparrow$. Z N1b dla $\mathbb{S}$ mamy $\mathcal{L}_i \leqslant \mathcal{L}_{i_0}$. Ponadto z N1a dla $\mathbb{S}$ dostajemy, że $\mathcal{L}_i$ jest wysoki w $\mathcal{P}$. A więc pamiętając o (60) otrzymujemy na mocy Lematu 25

$$\mathcal{L}_i \textit{ jest wysoki w } \mathcal{P}^+.$$

Dowód N1b, N1c, N1d, N1e, N2a, N2b. Oczywisty.

Po dowodzie pierwszych niezmienników możemy przejść do uzasadnienia dobrego postawienia końcowej części Przypadku B.

Dowód sensowności postawienia linii (A21). Dla zdefiniowania (A21) chcielibyśmy, by $x\Downarrow \cap \mathcal{L}_{i_0}$ zawierał się w dziedzinie funkcji λ_i, czyli w zbiorze

$\mathcal{L}_i$, dla dowolnego $i = 1, ..., i_0$. I jest tak, bo na mocy (A3), oraz N1 dla $\mathbb{S}$ i Faktu 2 otrzymujemy

$$x\Downarrow \cap \mathcal{L}_{i_0} \subseteq (\mathcal{L}_{i_0}\Uparrow - \mathcal{L}_{i_0+1}\uparrow)\Downarrow \cap \mathcal{L}_{i_0} \subseteq \bigcap_{i=1}^{i_0} \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_{i_0+1}\uparrow \subseteq \bigcap_{i=1}^{i_0} \mathcal{L}_i.$$

Po za tym potrzebujemy uzasadnienia, że dla dowolnie wybranego $z \in \mathcal{L}_{i_0}^+ \cap x\Downarrow$ zbiór kolorów $\left(\bigcup_{i=1}^{i_0} \lambda_i(z)\right) - c(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\})$ jest niepusty. Zauważmy najpierw, że (A3) zakłada, że $\mathcal{L}_{i_0}$ jest wysoki w $\mathcal{P}^+$. Zaś z N1b dla $\mathbb{S}$ mamy $\mathcal{L}_{i_0} \leqslant \mathcal{L}_{i_0+1}$. Z N1d oraz N1e dla $\mathbb{S}$ otrzymujemy $\mathcal{L}_{i_0} \neq \mathcal{L}_{i_0+1}$, a więc $\mathcal{L}_{i_0} < \mathcal{L}_{i_0+1}$. Możemy więc skorzystać z Lematu 19, co wraz z N1d i N1e daje

$$|\mathcal{C}_{i_0}| = |\mathcal{L}_{i_0}\Uparrow - \mathcal{L}_{i_0+1}\uparrow| < |\mathcal{L}_{i_0}| - |\mathcal{L}_{i_0+1}| \leqslant i_0 + 1. \tag{61}$$

Oszacujmy teraz ilość elementów zbioru $\left(\bigcup_{i=1}^{i_0} \lambda_i(z)\right) - c(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\})$ dla dowolnego $z \in x\Downarrow \cap \mathcal{L}_{i_0}$.

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\bigcup_{i=1}^{i_0} \{\lambda_i(z)\}\right) - c(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\})\right| = \\
= \; & \left|\bigcup_{i=1}^{i_0} \{\lambda_i(z)\}\right| - \left|c(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\}) \cap \bigcup_{i=1}^{i_0} \{\lambda_i(z)\}\right| && (62)\\
= \; & i_0 - \left|\left(\bigcup_{y\in\mathcal{C}_{i_0}-\{x\}} \; \bigcup_{u\in\mathcal{L}_{i_0}\cap y\Downarrow} \left\{\lambda_{ind^y(u)}(u)\right\}\right) \cap \bigcup_{i=1}^{i_0} \{\lambda_i(z)\}\right| && (63)\\
= \; & i_0 - \left|\bigcup_{y\in\mathcal{C}_{i_0}-\{x\}} \left\{\lambda_{ind^y(z)}(z)\right\}\right| && (64)\\
\geqslant \; & i_0 - |\mathcal{C}_{i_0} - \{x\}| > 0. && (65)
\end{aligned}$$

Wiersz (62) to proste operacje na zbiorach. Wiersz (63) wynika z Faktu 2 i N3 dla $\mathbb{S}$. Z kolei wiersz (64) korzysta także z Faktu 5. W końcu wiersz (65) opiera się na (61) oraz fakcie, że $x \in \mathcal{C}_{i_0}$. A więc ostatecznie

$$\left(\bigcup_{i=1}^{i_0} \{\lambda_i(z)\}\right) - c(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\}) \neq \emptyset.$$

Dowód N2c. Ponieważ $x \notin \mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i^+$ i x maksymalny w $\mathcal{P}^+$, to

$$x \notin \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i^+\right)\downarrow.$$

A zatem x nie ma wpływu na $top\,(\gamma)$. Kolorowanie punktów z $\mathcal{P}$ nie uległo zmianie więc $top^{+}\,(\gamma) = top\,(\gamma)$.

Dowód N3. Wystarczy pokazać istnienie funkcji

$$ind^{x} : \mathcal{L}_{i_0}^{+} \cap x\Downarrow \longrightarrow \{1, ..., i_0\}$$

spełniającej warunek

$$c^{+}(x) = \bigcup_{y \in \mathcal{L}_{i_0}^{+} \cap x\Downarrow} \left\{ \lambda_{ind^{x}(y)}(y) \right\}.$$

Dla pozostałych punktów funkcję, których istnienie postuluje się w N3 dla $\mathbb{S}^{+}$, są te same co w N3 dla $\mathbb{S}$. Wybierzmy więc dowolny $y \in \mathcal{L}_{i_0}^{+} \cap x\Downarrow = \mathcal{L}_{i_0} \cap x\Downarrow$. Oczywiście możemy wybrać $l \in \{1, ..., i_0\}$ takie, że

$$\lambda_l(y) = repr\left(\left(\bigcup_{i=1}^{i_0} \{\lambda_i\,(z)\} \right) - c\,(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\}) \right)$$

niech więc

$$ind^{x}(y) = l.$$

Łatwo zauważyć, że tak zdefiniowane ind^{x} spełnia

$$\begin{aligned} c^{+}(x) &= \bigcup_{y \in (\mathcal{L}_{i_0} \cap x\Downarrow)} \left\{ repr\left(\left(\bigcup_{i=1}^{i_0} \{\lambda_i(z)\} \right) - c\,(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\}) \right) \right\} \\ &= \bigcup_{y \in (\mathcal{L}_{i_0} \cap x\Downarrow)} \left\{ \lambda_{ind^{x}(y)}(y) \right\} = \bigcup_{y \in (\mathcal{L}_{i_0}^{+} \cap x\Downarrow)} \left\{ \lambda^{+}_{ind^{x}(y)}(y) \right\}. \end{aligned}$$

Dowód N4a. Niezmiennik N4a bada, czy dla dowolnego koloru γ punkty zawierające ten kolor tworzą łańcuch. Algorytm w przypadku B nie zmienił kolorów w żadnym wierzchołku, a więc dla wszystkich kolorów, które nie pokolorowały nowego punktu x uzasadnienie N4a jest oczywiste. Pozostają kolory γ takie, że

$$\gamma \in c(x)$$

wtedy mamy

$$Chain^{+}\,(\gamma) = Chain\,(\gamma) \cup \{x\}.$$

Pokażemy, że

$$x \geqslant Chain\,(\gamma) \tag{66}$$

co zakończy dowód N4a. Dla dowodu niewprost załóżmy istnienie $y \in Chain(\gamma)$, takiego że $x \parallel y$. Z Faktu 3 mamy

$$y \in \mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i \right)\!\downarrow = \mathcal{C}_{i_0} \cup \bigcup_{i=1..k;\ i \neq i_0} \mathcal{C}_i \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i \right)\!\downarrow .$$

Dowód (66) podzielimy na trzy przypadki.

- $y \in \mathcal{C}_{i_0}$

  Wtedy $\gamma \in c(y) \subseteq c(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\})$. Z drugiej strony (A21) daje świadka $z \in \mathcal{L}_{i_0} \cap x\Downarrow$ takiego, że

  $$\gamma \in \left(\bigcup_{i=1}^{i_0} \{\lambda_i(z)\} \right) - c(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\}) .$$

  co przeczy, że $\gamma \in c(\mathcal{C}_{i_0} - \{x\})$.

- $y \in \mathcal{C}_i$ dla jakiegoś $i \neq i_0$

  Warto zauważyć, że

  $$\begin{array}{rcll} c^+(x) & = & \left\{ \lambda_{ind^x(z)}(z) \ : \ z \in \mathcal{L}_{i_0} \cap x\Downarrow \right\} & \text{z N3} \\ & \subseteq & \{ \lambda_j(z) \ : \ j = 1, ..., i_0 \quad \& \quad z \in \mathcal{L}_{i_0} \cap x\Downarrow \} & \text{z N3} \\ & \subseteq & \left\{ \lambda_j(z) \ : \ j = 1, ..., i_0 \quad \& \quad z \in \bigcap_{l=1}^{i_0} \mathcal{L}_l - \mathcal{L}_{i_0}\!\uparrow \right\} & \text{z Faktu 2} \\ & = & \bigcup_{j=1}^{i_0} \lambda_j \left(\bigcap_{l=1}^{i_0} \mathcal{L}_l - \mathcal{L}_{i_0}\!\uparrow \right) . & \end{array}$$

  Z Faktu 6 dla $\mathbb{S}^+$ otrzymujemy

  $$c(\mathcal{C}_i) \cap \bigcup_{j=1}^{i_0} \lambda_j \left(\bigcap_{l=1}^{i_0} \mathcal{L}_l - \mathcal{L}_{j+1}\!\uparrow \right) = \emptyset, \tag{67}$$

  więc tym bardziej $c(y) \cap c^+(x) = \emptyset$ czyli $\gamma \notin c(y)$ co daje sprzeczność z $y \in Chain(\gamma)$.

- $y \in \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i \right)\!\downarrow$

  Z faktu $\gamma \in c(x)$, na mocy N3 dla $\mathbb{S}^+$ wiemy, że istnieje $z \in x\Downarrow \cap \mathcal{L}_{i_0}$ i $l \in \{1, ..., i_0\}$ takie, że

  $$\gamma = \lambda_l(z).$$

  Z N2c i $\gamma \in c(y)$ otrzymujemy

  $$y \leqslant top(\lambda_l(z)) \leqslant z \leqslant x$$

  co daje sprzeczność z faktem $y \parallel x$.

Dowód N4b. Z (A21), N2a, N2b, N3 dla $\mathbb{S}^+$ oraz $x \in \mathcal{L}_{i_0}\Uparrow$ dostajemy

$$\left|c^+(x)\right| = \left|\bigcup_{y\in\mathcal{L}_{i_0}\cap x\Downarrow} \left\{\lambda_{ind^x(y)}(y)\right\}\right| = |\mathcal{L}_{i_0} \cap x\Downarrow| \geqslant 1.$$

Dowód N4c. Oczywisty, bo $c^+|_p = c$.

Dowód przypadku C.

Dowód sensowności postawienia linii (A22) – (A29). Przed dowodem, że $\overline{\mathbb{S}} = (\mathcal{P}, \leqslant, k, \mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_k, \overline{\Gamma}_1, ..., \overline{\Gamma}_k, \overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_k, c)$ spełnia niezmienniki uzasadnimy sensowność kodu (A22) – (A29). Po pierwsze Lemat 17 dostarcza nam dla $i = 1, ..., k$ iniekcji $\psi_i : \mathcal{L}_i \longrightarrow \mathrm{HMA}\,(\mathcal{L}_i\uparrow)$, przy czym oczywiste jest, że w tym przypadku $y \leqslant \psi_i(y)$. Ponadto N1a mówi, że $\mathcal{L}_i$ jest wysoki w $\mathcal{P}$, więc na mocy Lematu 21, $\mathcal{L}_i$ jest równoliczny z $\mathrm{HMA}\,(\mathcal{L}_i\uparrow)$, więc wszystkie iniekcje ψ_i są bijekcjami. Z linii (A23) oraz z Faktu 2 otrzymujemy

$$\Delta_m \quad\subseteq\quad \mathcal{L}_{i_0} \cap \mathcal{C}_{i_0}\Downarrow \quad\subseteq\quad \bigcap_{j=1}^{i_0} \mathcal{L}_j - \mathcal{L}_{i_0+1}\uparrow,$$

a więc Δ_m zawiera się w dziedzinie funkcji $\lambda_1, ..., \lambda_{i_0}$. Potrzeba jeszcze uzasadnić poprawność definicji λ_{i_0} w (A28), tzn. że $\Delta_1, ..., \Delta_{i_0}$ są parami rozłączne. Dla dowolnego i weźmy u, v takie by $\mathcal{L}_i \ni v < u \in \mathcal{C}_i$. Z Faktu 2 wiemy, że v należy do dziedzin $\lambda_1, ..., \lambda_i$. Korzystając z N3 dla $\mathbb{S}$ i Faktu 5 dla $\mathbb{S}$ dostajemy

$$c(u) \cap \bigcup_{j=1}^{i} \{\lambda_j(v)\} = \bigcup_{w\in\mathcal{L}_i\cap u\Downarrow} \left\{\lambda_{ind^u(w)}(w)\right\} \cap \bigcup_{j=1}^{i} \{\lambda_j(v)\} = \left\{\lambda_{ind^u(v)}(v)\right\},$$

czyli

$$\left|c(u) \cap \bigcup_{j=1}^{i} \{\lambda_j(v)\}\right| = 1. \tag{68}$$

Niech $1 \leqslant m \neq m' \leqslant i_0$. Jeśli $z \in \Delta_m$, to $z \in \mathcal{L}_{i_0} \cap \mathcal{C}_{i_0}\Downarrow$ oraz $\psi_{i_0}(z) \in \mathcal{C}_{i_0}$, czyli z (68) otrzymujemy, że

$$\left|c(\psi_{i_0}(z)) \cap \bigcup_{j=1}^{i_0} \{\lambda_j(z)\}\right| = 1.$$

A więc

$$\lambda_m(z) \in c(\psi_{i_0}(z)) \quad\Rightarrow\quad \lambda_{m'}(z) \notin c(\psi_{i_0}(z))$$

czyli

$$z \in \Delta_m \quad \Rightarrow \quad z \notin \Delta_{m'}$$

a więc

$$\Delta_1, ..., \Delta_{i_0} \textit{ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych.} \tag{69}$$

Pociąga to z sobą fakt, że defnicja $\overline{\lambda}_{i_0}$ w linii (A28) jest sklejeniem funkcji na parami rozłącznych zbiorach, a więc jest poprawna.

Dowód N1a, N1b, N1c, N1d, N1e. Wszystkie antyłańcuchy $\mathcal{L}_i$ oraz poset $\mathcal{P}$ w $\overline{\mathbb{S}}$ są identyczne z ich odpowiednikami w $\mathbb{S}$, co pociąga spełnienie warunków.

Dowód N2a. Z N2a, N2b dla $\mathbb{S}$, (69) oraz z (A24), (A25), (A26) prosto otrzymujemy N2a dla $\overline{\mathbb{S}}$.

Dowód N2b. Z (69) i faktu, że $\lambda_1, ..., \lambda_k$ są bijekcjami o parami rozłącznych obrazach (N2a, N2b dla $\mathbb{S}$) otrzymujemy

$$\begin{gathered} \lambda_1|_{\Delta_1}, \quad \lambda_1|_{\mathcal{L}_1 - \Delta_1}, \quad ..., \quad \lambda_{i_0-1}|_{\Delta_{i_0-1}}, \quad \lambda_{i_0-1}|_{\mathcal{L}_{i_0-1}-\Delta_{i_0-1}} \\ \lambda_{i_0}|_{\Delta_1}, \quad \lambda_{i_0}|_{\Delta_2}, \quad ..., \quad \lambda_{i_0}|_{\Delta_{i_0}}, \quad \lambda_{i_0}|_{\mathcal{L}_{i_0} - \bigcup_{j=1}^{i_0} \Delta_j} \end{gathered} \tag{70}$$

są bijekcjami o parami rozłącznych obrazach. A więc ich sklejenia na rozłącznych dziedzinach, użyte w (A27) oraz (A28) są również bijekcjami o parami rozłącznych obrazach $\overline{\Gamma}_1, ..., \overline{\Gamma}_k$.

Dowód N2c. Ustalmy $i = 1, ..., k$, oraz $y \in \mathcal{L}_i$. Pokażmy, że

$$\textit{istnieje } j \in \{1, ..., k\} \textit{ takie, że } \overline{\lambda}_i(y) = \lambda_j(y). \tag{71}$$

Z linii (A24), (A25), (A26), otrzymujemy, że nie dodaliśmy nowego koloru tzn. $\bigcup_{i=1}^k \overline{\Gamma}_i = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$, a więc

$$\overline{\lambda}_i(y) \in \overline{\Gamma}_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{i_0} \Gamma_j.$$

A więc istnieje j takie, że $\overline{\lambda}_i(y) \in \Gamma_j = \lambda_j(\mathcal{L}_j)$. Po przeanalizowaniu linii (A27), (A28), (A29) prosto otrzymujemy $\overline{\lambda}_i(y) = \lambda_j(y)$, czyli (71). Teraz N2c dla $\mathbb{S}$ daje

$$top\left(\overline{\lambda}_i(y)\right) = top\,(\lambda_j(y)) \leqslant y.$$

Dowód N3. Na mocy N3 dla $\mathbb{S}$ dostajemy, że dla $i = 1, ..., k$ oraz elementu $y \in \mathcal{C}_i$ istnieje

$$ind^y : \mathcal{L}_i \cap y\Downarrow \longrightarrow \{1, ..., i\}$$

taka, że

$$c(y) = \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap y\Downarrow} \left\{ \lambda_{ind^y(z)}(z) \right\}.$$

Na bazie ind^y zdefiniujemy $\overline{ind}^y$, która będzie świadkiem na istnienie odpowiedniej funkcji w N3 dla $\overline{\mathbb{S}}$. Niech

$$\overline{ind}^y := ind^y \qquad dla\ i \neq i_0,\ \ oraz\ y \in \mathcal{C}_i. \tag{72}$$

Aby zobaczyć, że funkcja $\overline{ind}^y$ spełnia N3 dla $\overline{\mathbb{S}}$, zauważmy że (A23) daje $\Delta_m \subseteq \mathcal{C}_{i_0}\Downarrow \cap \mathcal{L}_{i_0}$ dla $m = 1, ..., i_0$, czyli

$$\bigcup_{m=1}^{i_0} \Delta_m \subseteq \mathcal{C}_{i_0}\Downarrow \cap \mathcal{L}_{i_0}. \tag{73}$$

Z Faktu 4 dla $j = 1, ..., k;\ j \neq i_0$ mamy

$$(\mathcal{C}_{i_0}\Downarrow \cap \mathcal{L}_{i_0}) \cap (\mathcal{C}_j\Downarrow \cap \mathcal{L}_j) = \emptyset, \tag{74}$$

co wraz z (73) daje

$$\bigcup_{m=1}^{i_0} \Delta_m \cap (\mathcal{C}_j\Downarrow \cap \mathcal{L}_j) = \emptyset. \tag{75}$$

Z linii (A27) i (A29) wynika, że dla $j \neq i_0$ funkcja λ_j zmienia się jedynie na zbiorze $\bigcup_{m=1}^{i_0} \Delta_m$, a więc z (75) dla dowolnego $z \in \mathcal{C}_i\Downarrow \cap \mathcal{L}_i$

$$\overline{\lambda}_j(z) = \lambda_j(z). \tag{76}$$

Teraz z N3 dla $\mathbb{S}$, (76) i (72) otrzymujemy

$$c(y) = \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap y\Downarrow} \left\{ \lambda_{ind^y(z)}(z) \right\} = \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap y\Downarrow} \left\{ \overline{\lambda}_{ind^y(z)}(z) \right\} = \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap y\Downarrow} \left\{ \overline{\lambda}_{\overline{ind}^y(z)}(z) \right\}.$$

W przypadku, gdy $y \in \mathcal{C}_{i_0}$ funkcję

$$\overline{ind}^y : \mathcal{L}_{i_0} \cap y\downarrow \longrightarrow \{1, ..., i_0\}$$

zdefiniujmy przez

$$\overline{ind}^y(z) := \begin{cases} i_0 & istnieje\ i\ \ t.że\ z \in \Delta_i \cap y\Downarrow \quad \& \quad ind^y(z) = i \\ i & istnieje\ i\ \ t.że\ z \in \Delta_i \cap y\Downarrow \quad \& \quad ind^y(z) = i_0 \\ ind^y(z) & w\ reszcie\ przypadków. \end{cases} \tag{77}$$

Ponieważ podmiana wartości dla funkcji $\overline{ind}^y$ jest zgodna z wymianą zbiorów postaci $\lambda_{i_0}(\Delta_i)$ na $\lambda_i(\Delta_i)$, dostajemy

$$\overline{\lambda}_{\overline{ind}^y(z)}(z) = \lambda_{ind^y(z)}(z)$$

co implikuje natychmiastowo N3 dla $y \in \mathcal{C}_{i_0}$.

Dowód N4. Oczywisty, bo c nie uległo zmianie.

Możemy teraz przejść do uzasadnienia poprawności drugiej połowy Przypadku C. Teraz dopiero będziemy rozważać poset $\mathcal{P}^+$ z nowo dodanym x.

Dowód N1a. Z (11) wiemy, że HMA $(\mathcal{L}_i\uparrow)$ jest wysoki $\mathcal{P}^+$, a więc na mocy Lematu 11 otrzymujemy

$$\mathrm{HMA}\left(\mathcal{L}_i^+\uparrow\right) = \mathrm{HMA}\left(\mathrm{HMA}\left(\mathcal{L}_i\uparrow\right)\uparrow\right) = \mathrm{HMA}\left(\mathcal{L}_i\uparrow\right) = \mathcal{L}_i^+,$$

co wraz z Lematem 10 dowodzi N1a.

Dowód N1b. Lemat 24 zastosowany do antyłańcuchów $\mathcal{L}_i \leqslant \mathcal{L}_{i+1}$ wysokich w $\mathcal{P}$ daje

$$\mathcal{L}_i^+ = \mathrm{HMA}\left(\mathcal{L}_i\uparrow\right) \leqslant \mathrm{HMA}\left(\mathcal{L}_{i+1}\uparrow\right) = \mathcal{L}_{i+1}^+.$$

Dowód N1c. Z faktu, że $\mathcal{L}_1$ jest wysoki w $\mathcal{P}$ na mocy Lematu 21 otrzymujemy $\mathit{width}(\mathcal{P}^+) = \mathit{width}(\mathcal{P}) = |\mathcal{L}_1| = |\mathrm{HMA}\left(\mathcal{L}_1\uparrow\right)| = \left|\mathcal{L}_1^+\right|$.

Dowód N1d i N1e. Z faktu, że $\mathcal{L}_i$ jest wysoki w $\mathcal{P}$ na mocy Lematu 21 otrzymujemy $|\mathcal{L}_i| = \left|\mathcal{L}_i^+\right|$ dla dowolnego $i = 1, ..., k$ co czyni N1d oraz N1e trywialnymi.

Dowód N2a. Z racji, że $\Gamma_i^+ = \overline{\Gamma}_i$ oraz $\overline{\Gamma}_1, ..., \overline{\Gamma}_k$ są parami rozłączne otrzymujemy, że $\Gamma_1^+, ..., \Gamma_k^+$ są także parami rozłączne.

Dowód N2b. Ponieważ $\overline{\lambda}_i : \mathcal{L}_i \longrightarrow \overline{\Gamma}_i$ oraz $\psi_i : \mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{L}_i^+$ są bijekcjami to z (A33) dostajemy, że $\lambda_i^+ = \overline{\lambda}_i \circ \psi_i^{-1}$ jest także bijekcją.

Dowód N2c. Z linii (A2) otrzymujemy, że $\mathit{width}(\mathcal{P}) = \mathit{width}(\mathcal{P}^+)$. Z warunków N1a i N1b dla $\mathbb{S}^+$ otrzymujemy odpowiednio, że $\mathcal{L}_1^+, ..., \mathcal{L}_k^+$ są wysokie w $\mathcal{P}^+$ oraz $\mathcal{L}_1^+ \leqslant ... \leqslant \mathcal{L}_k^+$. Na mocy Lematu 26 otrzymujemy więc, że

$$\begin{array}{r}
\mathcal{C}_i^+ = \mathcal{L}_i^+\Uparrow - \mathcal{L}_{i+1}^+\uparrow = \mathcal{L}_i\Uparrow - \mathcal{L}_{i+1}\uparrow = \mathcal{C}_i \quad \mathit{dla}\ i \neq i_0 \\
\mathcal{C}_{i_0}^+ = \mathcal{L}_{i_0}^+\Uparrow - \mathcal{L}_{i_0+1}^+\uparrow = \left(\mathcal{L}_{i_0}\Uparrow - \mathcal{L}_{i_0+1}\uparrow\right) - \mathcal{L}_{i_0}^+ = \mathcal{C}_{i_0} - \mathcal{L}_{i_0}^+.
\end{array} \tag{78}$$

Mamy więc kolejno

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i^{+}{\downarrow} &= \mathcal{P}^{+} - \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i^{+} && \text{z Fkt. 3 dla } \mathbb{S}^{+} \\
&= \mathcal{P}^{+} - \left(\bigcup_{i=1..k;\ i \neq i_0} \mathcal{C}_i \cup \left(\mathcal{C}_{i_0} - \mathcal{L}_{i_0}^{+} \right) \right) && \text{z (78)} \\
&= \mathcal{P}^{+} - \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i - \left(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^{+} \right) \right) && \\
&= \left(\mathcal{P}^{+} - \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i \right) \cup \left(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^{+} \right) && \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i{\downarrow} \right) \cup \left(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^{+} \right). && \text{z Fkt. 3 dla } \mathbb{S} \\
& && \text{i z } x \in \mathcal{P}^{+} \cap \mathcal{C}_{i_0}
\end{aligned} \tag{79}$$

Możemy teraz przyjżeć się zbiorowi $\mathit{Chain}\,(\gamma) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i^{+}{\downarrow} \right)$ gdzie $\gamma \in \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i^{+} = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathit{Chain}^{+}\,(\gamma) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i^{+}{\downarrow} \right) &= \left\{ y \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i^{+}{\downarrow} \colon \gamma \in c^{+}(y) \right\} = \\
= \left\{ y \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i{\downarrow} \colon \gamma \in c(y) \right\} &\cup \left\{ y \in \mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^{+} : \gamma \in c^{+}(y) \right\} = \\
= \left(\mathit{Chain}\,(\gamma) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i{\downarrow} \right) \right) &\cup \left\{ y \in \mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^{+} : \gamma = \lambda_{i_0}^{+}(y) \right\},
\end{aligned} \tag{80}$$

gdzie pierwsza równość wynika z definicji $\mathit{Chain}\,()$ w Def. 27, druga z (79). Ostatnia zaś wynika ponownie z definicji $\mathit{Chain}\,()$ i z linii (A34). Łatwo zauważyć, że jeśli tylko $\gamma \notin c^{+}\left(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^{+} \right)$, to nie istnieje $y \in \mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^{+}$ posiadający kolor γ, czyli z (80) mamy $\mathit{Chain}^{+}\,(\gamma) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i^{+}{\downarrow} \right) = \mathit{Chain}\,(\gamma) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i{\downarrow} \right)$ a więc

$$\mathit{top}^{+}\,(\gamma) = \mathit{top}\,(\gamma)\,, \quad \mathit{dla}\ \gamma \notin c^{+}\left(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^{+} \right). \tag{81}$$

W przypadku zaś, gdy $\gamma \in c^{+}\left(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^{+} \right)$, z (80) mamy $\left(\mathit{Chain}^{+}\,(\gamma) \cap \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i^{+}{\downarrow} \right) = \left(\mathit{Chain}\,(\gamma) \cap \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i{\downarrow} \right) \cup \left\{ \left(\lambda_{i_0}^{+} \right)^{-1}(\gamma) \right\}$. Pokażmy, że $\left(\lambda_{i_0}^{+} \right)^{-1}(\gamma)$ dominuje całe $\mathit{Chain}\,(\gamma) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i{\downarrow} \right)$ korzystając odpowiednio z N2c dla $\mathbb{S}^{+}$, oraz z faktu $z \leqslant \psi_{i_0}(z)$

$$\mathit{Chain}\,(\gamma) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i{\downarrow} \right) \leqslant \mathit{top}\,(\gamma) \leqslant \overline{\lambda}_{i_0}^{-1}(\gamma) \leqslant \psi_{i_0}(\overline{\lambda}_{i_0}^{-1}(\gamma)) = \left(\lambda_{i_0}^{+} \right)^{-1}(\gamma),$$

a więc
$$top^+(\gamma) = \psi_{i_0}(\overline{\lambda}_{i_0}^{-1}(\gamma)). \tag{82}$$
Po tych rozważaniach wstępnych możemy przejść do dowodu N2c. Pokażemy, że $top^+\left(\lambda_{i_0}^+(y)\right) \leqslant y$ dla dowolnego $y \in \mathcal{L}_i^+$. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy
$$y \in \mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^+.$$
Wtedy powołując się na (82) dostajemy
$$top^+\left(\lambda_{i_0}^+(y)\right) = top^+\left(\overline{\lambda}_{i_0}(\psi_{i_0}^{-1}(y))\right) = y.$$
Pozostał nam przypadek, gdy
$$y \notin \mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^+.$$
Jeżeli $i = i_0$ to z bijektywności λ_{i_0} oraz ψ_{i_0} dostajemy
$$\overline{\lambda}_{i_0}(\psi_{i_0}^{-1}(y)) \notin \overline{\lambda}_{i_0}(\psi_{i_0}^{-1}(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^+)) = c^+(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^+).$$
Jeżeli $i \neq i_0$ to z rozłączności obrazów λ_i i λ_{i_0} dostajemy, że
$$\overline{\lambda}_i(\psi_i^{-1}(y)) \notin \overline{\lambda}_{i_0}(\psi_{i_0}^{-1}(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^+)) = c^+(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^+).$$
To na mocy (81) daje
$$top^+\left(\lambda_i^+(y)\right) = top^+\left(\overline{\lambda}_i(\psi_i^{-1}(y))\right) = top\left(\overline{\lambda}_i(\psi_i^{-1}(y))\right) \leqslant \psi_i^{-1}(y) \leqslant y.$$
Dowód N3. Z (78) dostajemy, że
$$\mathcal{C}_i^+ \subseteq \mathcal{C}_i. \tag{83}$$
W Przypadku C mamy $\mathcal{L}_{i_0} \neq \mathrm{HMA}\,(\mathcal{L}_{i_0}) = \mathcal{L}_{i_0}^+$, co pociąga na mocy Lematu (22), fakt że $x \in \mathcal{L}_{i_0}^+$. Zaś na mocy N1a – N1c dla $\mathbb{S}^+$ oraz Faktu 3 dostajemy, że
$$x \notin \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i^+. \tag{84}$$
Z (83) i (84) mamy
$$\mathcal{C}_i^+ \subseteq \mathcal{C}_i \cap \mathcal{P}. \tag{85}$$
Łatwo zauważyć, że
$$\mathcal{L}_i^+ = \mathrm{HMA}\,(\mathcal{L}_i\!\uparrow) \subseteq \mathcal{L}_i\!\uparrow. \tag{86}$$
Z racji, że $width(\mathcal{P}) = width(\mathcal{P}^+)$, $relh(\mathcal{P}) \leqslant 1$, $relh(\mathcal{P}^+) \leqslant 1$ otrzymujemy na mocy Lematu 23
$$height(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\Uparrow) \leqslant 1. \tag{87}$$

Z kolei z faktu, że $\mathcal{L}_i$ jest wysoki w $\mathcal{P}$ i Lematu 18 mamy $\mathcal{L}_i \subseteq \mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\uparrow$. A więc odpowiednio na mocy (3), (10), oraz (6) otrzymujemy

$$height(\mathcal{L}_i\!\uparrow) \leqslant height(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\uparrow) = height(\mathrm{HMA}\,(\mathcal{P})\!\Uparrow) + 1 \leqslant 2. \qquad (88)$$

Ustalmy w tym momencie na resztę dowodu N3 dowolny $y \in \mathcal{C}_i^+$. Na mocy (86), (88), i (9) otrzymujemy kolejno

$$y\!\Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+ - \mathcal{L}_i \subseteq y\!\Downarrow \cap \mathcal{L}_i\!\uparrow - \mathcal{L}_i = y\!\Downarrow \cap \mathcal{L}_i\!\Uparrow = \emptyset,$$

czyli

$$\mathcal{L}_i^+ \cap y\!\Downarrow \subseteq \mathcal{L}_i. \qquad (89)$$

Dla $y \in \mathcal{C}_i^+ \subseteq \mathcal{C}_i \cap \mathcal{P}$ z warunku N3 dla $\overline{\mathbb{S}}$ istnieje funkcja $ind^y : \mathcal{L}_i \cap y\!\Downarrow \longrightarrow \{1, ..., i\}$ taka, że

$$c(y) = \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap y\Downarrow} \left\{ \overline{\lambda}_{ind^y(z)}(z) \right\}. \qquad (90)$$

Korzystając z (89) możemy więc zdefiniować

$$ind^{+y} := ind^y|_{\mathcal{L}_i^+ \cap y\Downarrow}.$$

Z (89), (78), oraz Faktu 2 dla $\mathbb{S}^+$ dla dowolnego i mamy kolejno

$$\mathcal{C}_i\!\Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+ \subseteq \mathcal{C}_i\!\Downarrow \cap \mathcal{L}_i \subseteq \bigcap_{j=1}^{i} \mathcal{L}_j \qquad (91)$$

czyli zbiór $\mathcal{C}_i\!\Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+$ zawiera się w dziedzinach funkcji $\overline{\lambda}_1, ..., \overline{\lambda}_i$. Z (90) łatwo wynika, że

$$\bigcup_{z \in \mathcal{L}_i^+ \cap y\Downarrow} \left\{ \overline{\lambda}_{ind^y(z)}(z) \right\} \subseteq \bigcup_{m=1}^{i} \overline{\lambda}_m \left(\mathcal{C}_i\!\Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+ \right). \qquad (92)$$

Z kolei z Faktu 5 mamy, że

$$\bigcup_{z \in \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_i^+ \cap y\Downarrow} \left\{ \overline{\lambda}_{ind^y(z)}(z) \right\} \cap \bigcup_{m=1}^{i} \overline{\lambda}_m \left(\mathcal{C}_i\!\Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+ \right) = \emptyset, \qquad (93)$$

gdyż $\left(\mathcal{L}_i - \mathcal{L}_i^+ \cap y\!\Downarrow\right) \cap \left(\mathcal{C}_i\!\Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+\right) = \emptyset$. Dla $z \in \mathcal{L}_i^+ \cap y\!\Downarrow$ element $\psi_1^{-1}(z) \in \mathcal{L}_i$ jest porównywalny z $\psi_i\left(\psi_i^{-1}(z)\right) = z \in \left(\mathcal{L}_i^+ \cap y\!\Downarrow\right) \subseteq \mathcal{L}_i$, co jest możliwe tylko gdy $z = \psi_i(z)$. Mamy więc

$$\psi_i(z) = z \qquad \textit{dla dowolnego } z \in \mathcal{L}_i^+ \cap y\!\Downarrow. \qquad (94)$$

Dostajemy następujący ciąg równości

$$
\begin{aligned}
c^+(y) &= c(y) \cap \bigcup_{m=1}^{i} \overline{\lambda}_m \left(\mathcal{C}_i \Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+\right) && \text{z (A35), (A36)} \\
&= \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap y \Downarrow} \left\{\overline{\lambda}_{ind^y(z)}(z)\right\} \cap \bigcup_{m=1}^{i} \overline{\lambda}_m \left(\mathcal{C}_i \Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+\right) && \text{z N3 dla } \overline{\mathbb{S}} \\
&= \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_i^+ \cap y \Downarrow} \left\{\overline{\lambda}_{ind^y(z)}(z)\right\} \cap \bigcup_{m=1}^{i} \overline{\lambda}_m \left(\mathcal{C}_i \Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+\right) \\
&\quad \cup \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_i^+ \cap y \Downarrow} \left\{\overline{\lambda}_{ind^y(z)}(z)\right\} \cap \bigcup_{m=1}^{i} \overline{\lambda}_m \left(\mathcal{C}_i \Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+\right) \\
&= \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i^+ \cap y \Downarrow} \left\{\overline{\lambda}_{ind^y(z)}(z)\right\} \cap \bigcup_{m=1}^{i} \overline{\lambda}_m \left(\mathcal{C}_i \Downarrow \cap \mathcal{L}_i^+\right) && \text{z (91) i (93)} \\
&= \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i^+ \cap y \Downarrow} \left\{\overline{\lambda}_{ind^y(z)}(z)\right\} && \text{z (83) i N3 dla } \mathbb{S} \\
&= \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i^+ \cap y \Downarrow} \left\{\overline{\lambda}_{ind^y(z)}\left(\psi^{-1}_{ind^y(z)}(z)\right)\right\} && \text{z (94)} \\
&= \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i^+ \cap y \Downarrow} \left\{\lambda^+_{ind^y(z)}(z)\right\}.
\end{aligned}
$$

Dowód N4c. Z linii (A35), (A36), oraz (A37) otrzymujemy natychmiast, że $c^+(y) \subseteq c(y)$ ilekroć $y \in \mathcal{P} - (\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}^+_{i_0})$. A zatem weźmy $y \in \mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}^+_{i_0}$. Z linii (A34) okazuje się, że wystarczy pokazać $\overline{\lambda}_{i_0}(\psi^{-1}_{i_0}(y)) \in c(y)$. Z faktu, że $y \in \mathcal{L}^+_{i_0}$ dostajemy $z := \psi^{-1}_{i_0}(y) \in \mathcal{L}_{i_0}$. Ponadto $z \leqslant y$. Z N3 dla $\mathbb{S}$ punkt z jest w dziedzinie ind^y. Zatem $m := ind^y(z) \in \{1, ..., i_0\}$ oraz

$$\lambda_m(z) = \lambda_{ind^y(z)}(z) \in c(y).$$

Łącznie z linią (A23) pociąga to za sobą fakt, że $z \in \Delta_m$. A więc z (A28) otrzymujemy, że $\overline{\lambda}_{i_0}(z) = \lambda_m(z)$. W konsekwencji

$$\overline{\lambda}_{i_0}(\psi^{-1}_{i_0}(y)) = \overline{\lambda}_{i_0}(z) = \lambda_m(z) \in c(y),$$

co dowodzi N4c.

Dowód N4a. Wykorzystując N4c dla $\mathbb{S}^+$ otrzymujemy, że

$$\mathit{Chain}^+(\gamma) \subseteq \mathit{Chain}(\gamma) \quad \text{\textit{dla dowolnego} } \gamma \notin c^+(x).$$

A więc z warunku N4a dla $\overline{\mathbb{S}}$ wiemy, że $\mathit{Chain}(\gamma)$ jest łańcuchem, co implikuje, że $\mathit{Chain}^+(\gamma)$ jest również łańcuchem. Do rozpatrzenia pozostały nam jedynie kolory $\gamma \in c^+(x)$. Wiemy, że $x \in \mathcal{L}_{i_0}\Uparrow$, $\mathcal{L}_{i_0} \neq \mathrm{HMA}\,(\mathcal{L}_{i_0})$ oraz że $\mathcal{L}_{i_0}$ jest wysoki w $\mathcal{P}$. Pozwala to użyć Lemat 22 by dostać

$$x \in \mathrm{HMA}\,(\mathcal{L}_{i_0}\uparrow) = \mathcal{L}^+_{i_0}. \tag{95}$$

Z (95) oraz (A34) dostajemy, że $c^+(x) = \left\{\overline{\lambda}_{i_0}(\psi^{-1}_{i_0}(x))\right\}$, czyli $\gamma = \overline{\lambda}_{i_0}(\psi^{-1}_{i_0}(x))$. Pokażemy, że

$$\mathit{Chain}^+\left(\overline{\lambda}_{i_0}(\psi^{-1}_{i_0}(x))\right) - \{x\} \subseteq \mathit{Chain}\left(\overline{\lambda}_{i_0}(\psi^{-1}_{i_0}(x))\right) = \mathit{Chain}\,(\gamma) \leqslant x$$

co zakończyło by dowód. Z racji, że x jest maksymalny w $\mathcal{P}^+$ otrzymujemy, że $x \not< y$. Dla dowodu niewprost załóżmy, że istnieje $y \in \mathit{Chain}\,(\gamma)$, taki że $x \parallel y$. Z Faktu 3 dla $\overline{\mathbb{S}}$ mamy

$$y \in \mathcal{P} = \left(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}^+_{i_0}\right) \cup \left(\mathcal{C}_{i_0} - \mathcal{L}^+_{i_0}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1..k;\ i\neq i_0} \mathcal{C}_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i\downarrow\right)$$

Dowód rozpatrzy cztery przypadki, w zależności od tego w którym składniku powyżej sumy leży y.

- Jeśli $y \in \mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}^+_{i_0}$, to z linii (A34) otrzymujemy, że $c^+(y) = \left\{\overline{\lambda}_{i_0}(\psi^{-1}_{i_0}(y))\right\}$. Wiemy także, że $x \neq y$, a więc $\psi^{-1}_{i_0}(x) \neq \psi^{-1}_{i_0}(y)$, czyli

  $$\gamma = \overline{\lambda}_{i_0}(\psi^{-1}_{i_0}(x)) \neq \overline{\lambda}_{i_0}(\psi^{-1}_{i_0}(y)).$$

  Co pociąga za sobą fakt, że $\gamma \notin c(y)$, czyli $y \notin \mathit{Chain}\,(\gamma)$, co daje sprzeczność z faktem $y \in \mathit{Chain}\,(\gamma)$.

- Jeśli $y \in \mathcal{C}_{i_0} - \mathcal{L}^+_{i_0}$, to z linii (A35) mamy, że

  $$c^+(y) := c(y) \cap \bigcup_{j=1}^{i_0} \overline{\lambda}_j\left(\mathcal{C}_{i_0}\Downarrow \cap \mathcal{L}^+_{i_0}\uparrow\right).$$

  Z racji, że $x \in \mathcal{L}^+_{i_0} - \mathcal{L}_{i_0}$ otrzymujemy $\psi^{-1}_{i_0}(x) \notin \mathcal{L}^+_{i_0}$. Czyli na mocy (91), oraz Faktu 5 otrzymujemy, że

  $$\gamma = \overline{\lambda}_{i_0}(\psi^{-1}_{i_0}(x)) \notin \bigcup_{j=1}^{i_0} \overline{\lambda}_j\left(\mathcal{C}_{i_0}\Downarrow \cap \mathcal{L}^+_{i_0}\right) \supseteq c^+(y)$$

  co pociąga fakt, że $y \notin \mathit{Chain}\,(\gamma)$ co daje sprzecznośc.

- Jeśli $y \in \left(\bigcup_{i=1..k;\ i\neq i_0} \mathcal{C}_i\right)$, to $y \in \mathcal{C}_i$ dla pewnego $i \neq i_0$. Wiemy, z (91), oraz z Faktu 2, że $\psi_{i_0}^{-1}(x) \in \bigcap_{j=1}^{i_0} \mathcal{L}_j - \mathcal{L}_{i_0+1}\uparrow$. Mamy zatem

$$c^+(x) = \left\{\overline{\lambda}_{i_0}(\psi_{i_0}^{-1}(x))\right\} \subseteq \overline{\lambda}_{i_0}\left(\bigcap_{j=1}^{i_0} \mathcal{L}_j - \mathcal{L}_{i_0+1}\uparrow\right) \subseteq \bigcup_{m=1}^{i_0} \overline{\lambda}_m \left(\bigcap_{j=1}^{i_0} \mathcal{L}_j - \mathcal{L}_{i_0+1}\uparrow\right).$$

  Z Faktu 6 dla $\overline{\mathbb{S}}$ otrzymujemy

$$c\left(\mathcal{C}_i\right) \cap \bigcup_{m=1}^{i_0} \lambda_m \left(\bigcap_{j=1}^{i_0} \mathcal{L}_j - \mathcal{L}_{i_0+1}\uparrow\right) = \emptyset$$

  więc tym bardziej $c(y) \cap c^+(x) = \emptyset$. A więc z racji, że $\gamma \in c^+(x)$ dostajemy, że $\gamma \notin c(y)$, czyli $y \notin \mathit{Chain}(\gamma)$, co pociąga za sobą sprzeczność z faktem, że $y \in \mathit{Chain}(\gamma)$.

- Jeśli $y \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i\downarrow$ to pamiętając, że $\psi_{i_0}^{-1}(x) \in \mathcal{L}_{i_0}$, warunek N2c dla $\overline{\mathbb{S}}$ daje

$$y \leqslant \mathit{top}\left(\psi_{i_0}^{-1}(x)\right) \leqslant \psi_{i_0}^{-1}(x) \leqslant x.$$

  Otrzymujemy więc sprzeczność z faktem, że $y \parallel x$.

Dowód N4b. Weźmy dowolny $y \in \mathcal{P}$. Na mocy Faktu 3 dla $\mathbb{S}^+$ otrzymujemy

$$y \in \mathcal{P}^+ = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i^+ \cup \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i^+\downarrow .$$

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $y \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i^+$, czyli $y \in \mathcal{C}_i^+$ dla pewnego i. Na mocy N3 dla $\mathbb{S}^+$ dostajemy, że

$$c(y) = \bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap y\Downarrow} \left\{\lambda_{\mathit{ind}^y(z)}(z)\right\} \tag{96}$$

dla pewnej funkcji $\mathit{ind}^y : \mathcal{L}_i \cap y\Downarrow \longrightarrow \{1, ..., i\}$. Z racji, że $y \in \mathcal{L}_i\uparrow$ wiemy, że $1 \leqslant |\mathcal{L}_i \cap y\Downarrow|$. A więc z (96) dostajemy, że

$$1 \leqslant \left|\bigcup_{z \in \mathcal{L}_i \cap y\Downarrow} \left\{\lambda_{\mathit{ind}^y(z)}(z)\right\}\right| = |c(y)|.$$

W przypadku drugim korzystając z (79) dostajemy, że

$$\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i^+\downarrow = \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i\downarrow\right) \cup \left(\mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^+\right).$$

Jeśli $y \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i\downarrow$ to na mocy (A37) dostajemy, że $1 \leqslant |c(y)| = |c^+(y)|$. Jeśli zaś $y \in \mathcal{C}_{i_0} \cap \mathcal{L}_{i_0}^+$, to z (A34) otrzymujemy natychmiast, że $|c^+(y)| = 1$.

Dowód Liczba kolorów. Pozostało nam pokazanie, że algorytm używa conajwyżej $d\sqrt{d}+O(d)$ kolorów na posecie szerokości d. Łatwo dowieść przez indukcję, korzystając z N1c i N1d, że dla dowolnego $i = 1, ..., k$ zachodzi

$$\sum_{j=1}^{i} |\mathcal{L}_j| = \frac{1}{3}i^3 - \frac{1}{3}i + i\,|\mathcal{L}_i| \tag{97}$$

oraz

$$|\mathcal{L}_j| = d - \frac{1}{2}j^2 - \frac{1}{2}j + 1. \tag{98}$$

W szczególności dla $j = k$, (98) daje $\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k - 1 \leqslant d$, co pociąga za sobą, że

$$k \leqslant -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 2d} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \sqrt{2d} = 1 + \sqrt{2d}. \tag{99}$$

Teraz

$$\begin{array}{rcll}
\left|\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i\right| & = & \sum_{i=1}^{k} |\Gamma_i| & \text{z rozłączności } \Gamma_1, ..., \Gamma_k \\
& = & \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{L}_i| & \text{z bijektywności } \lambda_1, ..., \lambda_k \\
& = & \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{3}k + k\,|\mathcal{L}_k| & \text{z (97)} \\
& \leqslant & \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{3}k + k(k+1) & \text{z N1e} \\
& = & \frac{1}{3}k^3 + k^2 + \frac{2}{3}k & \\
& = & \frac{1}{3}(\sqrt{2d})^3 + O(d) & \text{z (99)} \\
& \leqslant & d\sqrt{d} + O(d). &
\end{array}$$

□

Przeprowadzając bardziej skomplikowaną lecz dokładniejszą analizę można pokazać, że

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i\right| \leqslant d\sqrt{d}.$$

Wzmacnia to Twierdzenie 8 do następującego wniosku.

Wniosek 28 *Istnieje algorytm online adaptywnie kolorujący posety online upgrowing używając $d\sqrt{d}$ kolorów, gdzie d jest szerokością posetu.*

W pierwszej kolejności chciałbym podziękować Piotrowi Mickowi, który jest współautorem rezultatów zawartych w powyższej pracy. Ponadto chciałbym podziękować mojemu promotorowi prof. Pawłowi Idziakowi za motywację i pomocną dłoń.

Literatura

[1] S.Felsner, *On-line Chain Partitions of Orders*, Theoretical Computer Science, R.175, s.283-292, 1997

[2] H.A.Kierstead, G.F.McNulty and W.T.Trotter, *A theory of recursive dimension for ordered sets*, Order, R.1, s.67-82, 1984

[3] Witold Lipski, Wiktor Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN Warszawa 1986