Inscribed square problem

Wojciech Buczek

Uniwersytet Jagielloński

Inscribed square problem - intuicja

Inscribed square conjecture (Otto Toeplitz, 1911)

Na każdej ciągłej zamkniętej krzywej na płaszczyźnie da się wpisać kwadrat.

Inscribed square problem - intuicja

Inscribed square conjecture (Otto Toeplitz, 1911)

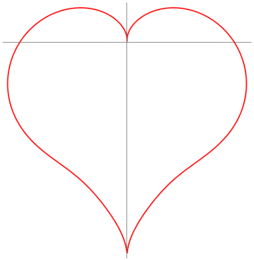
Na każdej ciągłej zamkniętej krzywej na płaszczyźnie da się wpisać kwadrat.

$$r(t) = \frac{\sin(t)\sqrt{|cos(t)|}}{sin(t) + 1.4} - 2\sin(t) + 2$$

Inscribed square conjecture (Otto Toeplitz, 1911)

Na każdej ciągłej zamkniętej krzywej na płaszczyźnie da się wpisać kwadrat.

$$r(t) = \frac{\sin(t)\sqrt{|cos(t)|}}{sin(t) + 1.4} - 2\sin(t) + 2$$

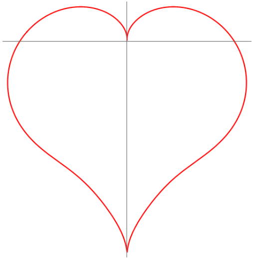


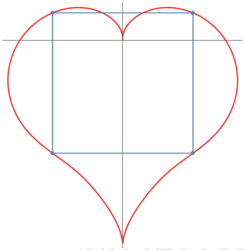
Inscribed square problem - intuicja

Inscribed square conjecture (Otto Toeplitz, 1911)

Na każdej ciągłej zamkniętej krzywej na płaszczyźnie da się wpisać kwadrat.

$$r(t) = \frac{\sin(t)\sqrt{|cos(t)|}}{sin(t) + 1.4} - 2\sin(t) + 2$$





Krzywa Jordana

Krzywa γ

Odwzrowanie ciągłe przedziału (α, β) w płaszczyznę nazywa się **krzywą** γ na płaszczyźnie.

Krzywa Jordana

Krzywa γ

Odwzrowanie ciągłe przedziału (α, β) w płaszczyznę nazywa się **krzywą** γ na płaszczyźnie.

Krzywa zamknięta

Krzywą γ odwzorowującą przedział (α, β) nazwiemy **zamkniętą**, jeżeli $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Krzywa Jordana

Krzywa γ

Odwzrowanie ciągłe przedziału (α, β) w płaszczyznę nazywa się **krzywą** γ na płaszczyźnie.

Krzywa zamknięta

Krzywą γ odwzorowującą przedział (α, β) nazwiemy **zamkniętą**, jeżeli $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Krzywa Jordana

Krzywą Jordana nazywamy krzywą zamkniętą odwzorowującą przedział (α, β) różnowartościową w przedziale $\{t : \alpha < t < \beta\}$

Krzywa Jordana

Krzywa γ

Odwzrowanie ciągłe przedziału (α, β) w płaszczyznę nazywa się **krzywą** γ na płaszczyźnie.

Krzywa zamknięta

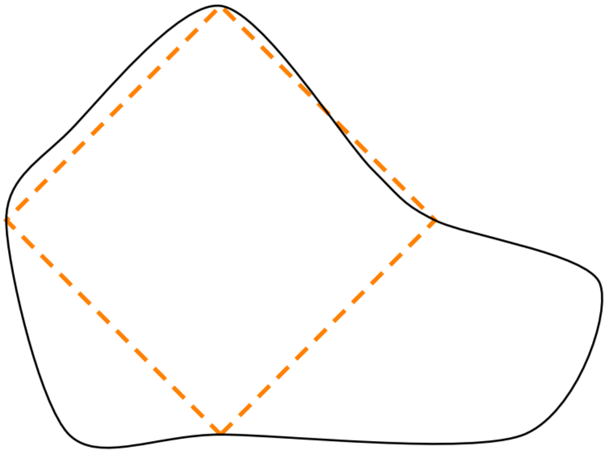
Krzywą γ odwzorowującą przedział (α, β) nazwiemy **zamkniętą**, jeżeli $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Krzywa Jordana

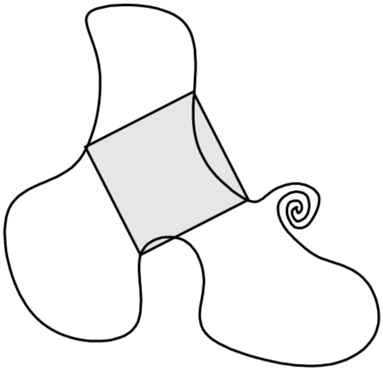
Krzywą Jordana nazywamy krzywą zamkniętą odwzorowującą przedział (α, β) różnowartościową w przedziale $\{t : \alpha < t < \beta\}$

Inaczej: homeomorficzny obraz okręgu na płaszczyźnie.

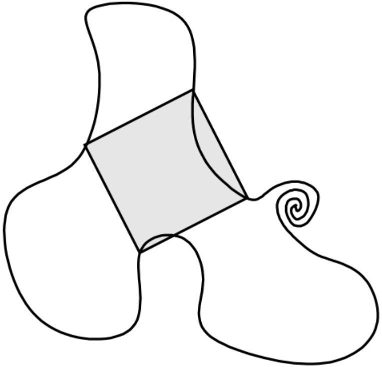
Krzywa Jordana



Krzywa Jordana



Krzywa Jordana



Nie wymagamy, aby kwadrat był w całości 'w środku' krzywej - inaczej wiemy, że hipoteza jest fałszywa.

Trapezy specjalne

Trapez specjalny

Niech $x_1, \ldots, x_4$ będą punktami leżącymi na okręgu S^1 w porządku zgodnie ze wskazówkami zegara, oraz $P_i = \gamma(x_i)$ Trapezem **specjalnym** nazwiemy 4 punkty $s_1, \ldots, s_4$, spełniające:

- $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_3) = d(P_3, P_4) > d(P_4, P_1)$
- $d(P_1, P_3) = d(P_2, P_4)$

Trapezy specjalne

Trapez specjalny

Niech $x_1, \ldots, x_4$ będą punktami leżącymi na okręgu S^1 w porządku zgodnie ze wskazówkami zegara, oraz $P_i = \gamma(x_i)$ Trapezem **specjalnym** nazwiemy 4 punkty $s_1, \ldots, s_4$, spełniające:

- $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_3) = d(P_3, P_4) > d(P_4, P_1)$
- $d(P_1, P_3) = d(P_2, P_4)$

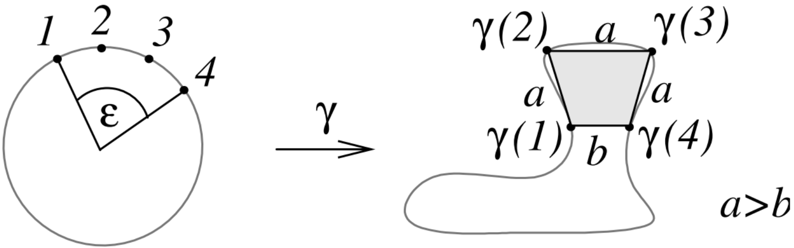
Rozmiarem trapezu specjalnego nazwiemu długość łuku z x_1 do x_4 na okręgu S.

Trapez specjalny

Niech $x_1, \ldots, x_4$ będą punktami leżącymi na okręgu S^1 w porządku zgodnie ze wskazówkami zegara, oraz $P_i = \gamma(x_i)$ Trapezem **specjalnym** nazwiemy 4 punkty $s_1, \ldots, s_4$, spełniające:

- $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_3) = d(P_3, P_4) > d(P_4, P_1)$
- $d(P_1, P_3) = d(P_2, P_4)$

Rozmiarem trapezu specjalnego nazwiemu długość łuku z x_1 do x_4 na okręgu S.



Brak trapezów rozmiaru ε (Matschke (2011))

Brak trapezów rozmiaru ε (Matschke (2011))

Niech γ będzie krzywą Jordana $S^1 \to \mathbb{R}^2$. Jeśli istnieje takie $0 < \varepsilon < 2\pi$, że γ nie zawiera specjalnego trapezu rozmiaru ε, to da się w γ wpisać kwadrat.

Brak trapezów rozmiaru ε (Matschke (2011))

Niech γ będzie krzywą Jordana $S^1 \to \mathbb{R}^2$. Jeśli istnieje takie $0 < \varepsilon < 2\pi$, że γ nie zawiera specjalnego trapezu rozmiaru ε, to da się w γ wpisać kwadrat.

Istnieje silniejsza wersja - wystarczy, że ilość takich specjalnych trapezów jest parzysta.

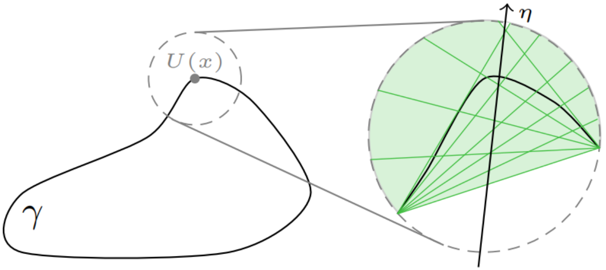
Lokalna monotoniczność

Krzywą $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ nazywamy **lokalnie monotoniczną**, jeżeli dla każdego $x \in S^1$, x ma sąsiedztwo U takie, że istnieje niezerowy wektor μ taki, że $\gamma|_U$ nie zawiera cięciwy równoległej do μ.

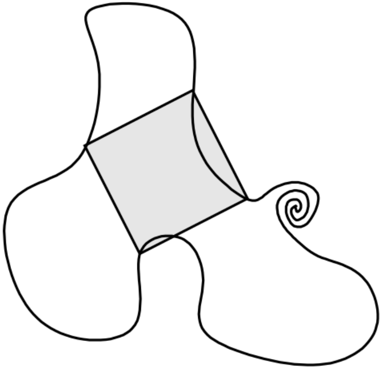
Lokalne monotoniczności

Lokalna monotoniczność

Krzywą $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ nazywamy **lokalnie monotoniczną**, jeżeli dla każdego $x \in S^1$, x ma sąsiedztwo U takie, że istnieje niezerowy wektor μ taki, że $\gamma|_U$ nie zawiera cięciwy równoległej do μ.



Lokalne monotoniczności



Lokalne monotoniczności

Lokalna monotoniczność (Stromquist(1989))

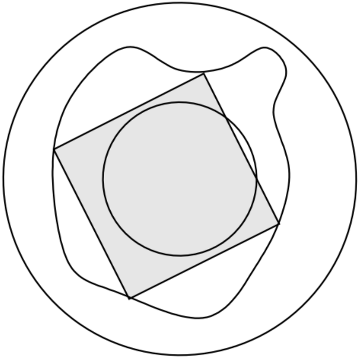
Jeśli $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ jest lokalnie monotoniczne, to da się w γ wpisać kwadrat.

Pierścienie kołowe

Jeśli $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ jest wpisany w pierścieniu kołowym, którego promień zewnętrznego okręgu jest co najwyżej równy $1 + \sqrt{2}$ promieniowi okręgu wewnętrznego, to w γ da się wpisać kwadrat.

Pierścienie kołowe

Jeśli $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ jest wpisany w pierścieniu kołowym, którego promień zewnętrznego okręgu jest co najwyżej równy $1+\sqrt{2}$ promieniowi okręgu wewnętrznego, to w γ da się wpisać kwadrat.



Krzywe Jordana na kracie

Rozważmy teraz krzywe Jordana, które składają się tylko z segmentów o końcach (x, y) i $(x+1, y)$ lub (x, y) i $(x, y+1)$ (możemy iść tylko w górę lub prawo).

Rozważmy teraz krzywe Jordana, które składają się tylko z segmentów o końcach (x, y) i $(x+1, y)$ lub (x, y) i $(x, y+1)$ (możemy iść tylko w górę lub prawo).

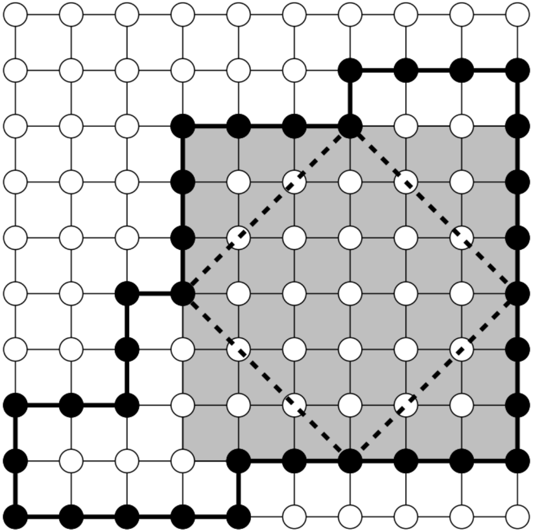
Dla krzywej J, niech $i(J)$ oznacza długość boku największego kwadratu, który w całości "mieści się w środku J", którego boki są równoległe do linii na kracie.

Krzywe Jordana na kracie

Rozważmy teraz krzywe Jordana, które składają się tylko z segmentów o końcach (x, y) i $(x+1, y)$ lub (x, y) i $(x, y+1)$ (możemy iść tylko w górę lub prawo).

Dla krzywej J, niech $i(J)$ oznacza długość boku największego kwadratu, który w całości "mieści się w środku J", którego boki są równoległe do linii na kracie.

Dla krzywej J, niech $o(J)$ oznacza długość boku najmniejszego kwadratu, który w całości zawiera j, którego boki są równoległe do linii na kracie.



Hipoteza kwadratu wpisanego w kratę Jordana

Hipoteza

Każda krzywa Jordana J na kracie zawiera 4 punkty o całkowitych współrzędnych które są wierzchołkami kwadratu o boku przynajmniej $\frac{i(J)}{\sqrt{2}}$

Hipoteza kwadratu wpisanego w kratę Jordana

Hipoteza

Każda krzywa Jordana J na kracie zawiera 4 punkty o całkowitych współrzędnych które są wierzchołkami kwadratu o boku przynajmniej $\frac{i(J)}{\sqrt{2}}$

Jeśli $i(J) = 2m$, to długość boku wynosi najmniej $m\sqrt{2}$. Jeśli $i(J) = 2m + 1$, to długość boku wynosi co najmniej $\sqrt{m^2 + (m+1)^2}$ (najmniejsza możliwa odległość większa lub równa $\frac{(2m+1)}{\sqrt{2}}$

Trójkąt wpisany

- Czy da się wpisać trójkąt w dowolną krzywą Jordana?

Trójkąt wpisany

- Czy da się wpisać trójkąt w dowolną krzywą Jordana?
- Czy da się wpisać trójkąt równoboczny w dowolną krzywą Jordana?

Trójkąt wpisany

- Czy da się wpisać trójkąt w dowolną krzywą Jordana?
- Czy da się wpisać trójkąt równoboczny w dowolną krzywą Jordana?
- Czy dla dowolnego trójkąta T oraz dowolnej krzywej Jordana γ, istnieje taki trójkąt T' podobny do trójkąta T, który da się wpisać w γ?

Trójkąt wpisany

- Czy da się wpisać trójkąt w dowolną krzywą Jordana?
- Czy da się wpisać trójkąt równoboczny w dowolną krzywą Jordana?
- Czy dla dowolnego trójkąta T oraz dowolnej krzywej Jordana γ, istnieje taki trójkąt T' podobny do trójkąta T, który da się wpisać w γ?

Nielsen, 1992

Tak.

Prostokąt wpisany

Czy da się wpisać prostokąt w dowolną krzywą Jordana?

Prostokąt wpisany

Czy da się wpisać prostokąt w dowolną krzywą Jordana?

Cole Hugelmeyer, 2018

W każdą krzywą Jordana $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ da się wpisać prostokąt ze współczynnikiem proporcji $\sqrt{3}$

Prostokąt wpisany

Czy da się wpisać prostokąt w dowolną krzywą Jordana?

Cole Hugelmeyer, 2018

W każdą krzywą Jordana $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ da się wpisać prostokąt ze współczynnikiem proporcji $\sqrt{3}$

Hipoteza prostokąta wpisanego

Dla każdego r i każdej krzywej Jordana $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ da się wpisać prostokąt o współczynniku proporcji r w krzywą γ.

Liczba kwadratów wpisanych (Sagols and Marin, 2009)

Dla każdego $n \geqslant 1$, da się skonstruować krzywą, która zawiera dokładnie n kwadratów wpisanych.

Dziękuję za uwagę

Obrazki pochodzą z następujących prac:

https://www.math.u-bordeaux.fr/ bmatschke/SurveyOnSquarePeg06.pdf
https://link.springer.com/article/10.1007/s00454-014-9578-5
https://terrytao.wordpress.com/2016/11/22/an-integration-approach-to-the-toeplitz-square-peg-problem/comment-474751
http://www-users.math.umn.edu/ kell1642/kelley$_t$*hesis.pdf*