Seven trees in one: objects of categories as complex numbers

Bruno Pitrus
<brunopitrus@hotmail.com>

14 stycznia 2021

THEORETICAL COMPUTER SCIENCE
Jagiellonian University

```
data Tree= Leaf | Branch Tree Tree
```

$$T = 1 + T^2$$

$$T^2 - T + 1 = 0$$

$$\left(T - \sqrt[3]{-1}\right)\left(T - \overline{\sqrt[3]{-1}}\right) = 0$$

$$T^6 = 1$$

$$T^7 = T$$

$$\exists f : T^7 \to T, g : T \to T^7 : g \circ f = \mathrm{id}_{T^7}, f \circ g = \mathrm{id}_T$$

$$f(1,2,3,4,5,6,7) \coloneqq ((((((7,6),5),4),3),2),1), \quad (1,2,3,4) \neq (\perp,\perp,\perp,\perp)$$

$$f(\perp,\perp,\perp,\perp,(5_a,5_b),6,7) \coloneqq ((((\perp,7),6),5_a),5_b)$$

$$f(\perp,\perp,\perp,\perp,\perp,6,7) \coloneqq (((((6,7),\perp),\perp),\perp),\perp), 6 \neq \perp$$

$$f(\perp,\perp,\perp,\perp,\perp,\perp,((((7_a,7_b),7_c),7_d),7_e)) \coloneqq (((((\perp,7_a),7_b),7_c),7_d),7_e)$$

$$f(\perp,\perp,\perp,\perp,\perp,\perp,7) \coloneqq 7$$

$$T^2 = T - 1$$

$$T^7 = T^6 - T^5 = -T^4 = -T^3 + T^2 = T$$

$$T^7 + T^5 + T^4 + T^3 = \cdots = T^5 + T^4 + T^3 + T$$

Kiedy $A + X = B + X$ implikuje $A = B$? Jeśli X jest skończone to OK. W tym przypadku iterowanie nie zadziała.

$$T^7 + T^5 + T^4 + T^3 = T^6 + T^4 + T^3 = T^5 + T^3 = T^5 + T^4 + T^2 = T^5 + T^4 + T^3 + T$$

$$T^{k+3} + T^k + T^r = T^r, r \in \{k+1, k+2\}$$

Co dla pozostałych r? Korzystamy z faktu że $T^r = T^{r-1} + T^{r+1}$.
W szczególności nie da się udowodnić że $T^6 = 1$ 🙃

$$T^7 = T^7 + T^4 + T = T$$

Kiedy **Osiemnastowieczna Algebra™** da się przekształcić w legitny dowód?

Półpierścień (przemienny)

Zbiór z wyróżnionymi elementami 0 i 1 i przemiennymi i łącznymi operacjami $+$ i $\cdot$ t.że

$$0 + a = a \quad 1a = a \quad 0 = 0a \quad ab + ac = a(b + c)$$

- $\mathbb{N}$ (obiekt początkowy)
- $\mathbb{N}[x_1, \dots, x_k]$ (półpierścień wolny nad k generatorami)
- dowolny pierścień
- $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, „ $+$ ” $:=$ max, „ $\cdot$ ” $:= +$
- dowolna krata z maximum i minimum, „ $+$ ” $:= \wedge$, „ $\cdot$ ” $:= \vee$

Kiedy **Osiemnastowieczna Algebra™** da się przekształcić w legitny dowód?

Półpierścień (przemienny)

Zbiór z wyróżnionymi elementami 0 i 1 i przemiennymi i łącznymi operacjami $+$ i $\cdot$ t.że

$$0 + a = a \quad 1a = a \quad 0 = 0a \quad ab + ac = a(b + c)$$

Niech $p, q_1, q_2 \in \mathbb{N}[x]$ i każdy zespolony pierwiastek $p(x) - x$ spełnia $q_1(x) = q_2(x)$. Co musimy wiedzieć o tych wielomianach żeby równość zachodziła dla wszystkich półpierścieni?

Niech $p, q_1, q_2 \in \mathbb{N}[x]$ i każdy zespolony pierwiastek $p(x) - x$ spełnia $q_1(x) = q_2(x)$. Wtedy jeśli wielomian $p(x) - x \in \mathbb{Z}[x]$ jest *pierwotny* (tj. gcd jego współczynników wynosi 1) i nie ma zespolonych pierwiastków wielokrotnych, to ta równość zachodzi w dowolnym półpierścieniu.

Dowód dla pierścieni

$$q_1 - q_2 = f(p - x) + g, \quad f, g \in \mathbb{Q}[x] \quad \deg g < \deg(p - x)$$

Każdy z pierwiastków $p - x$ jest pierwiastkiem $q_1 - q_2$ więc jest również pierwiastkiem g. Stąd $g = 0$. Jeśli $f \in \mathbb{Z}[x]$ to OK. Else piszemy $f =: \widetilde{f}/k$, $\widetilde{f} \in \mathbb{Z}[x]$ pierwotny. Wtedy mamy

$$k(q_1 - q_2) = \widetilde{f}(p - x)$$

z lematu Gaussa (iloczyn wielomianów pierwotnych jest pierwotny) mamy $k = \pm 1$.

Niech $p, q_1, q_2 \in \mathbb{N}[x]$ i każdy zespolony pierwiastek $p(x) - x$ spełnia $q_1(x) = q_2(x)$. Wtedy jeśli wielomian $p(x) - x \in \mathbb{Z}[x]$ jest *pierwotny* (tj. gcd jego współczynników wynosi 1) i nie ma zespolonych pierwiastków wielokrotnych, to ta równość zachodzi w dowolnym półpierścieniu.

$$x = 2 + x + 2x^2 \Rightarrow x = 1 + x + x^2$$

nie zachodzi dla $x = 0 \in \mathbb{Z}_2$

$$x = 1 + 3x + x^2 \Rightarrow x = 1 + 2x$$

nie zachodzi dla $x = T \in \mathbb{Z}[T]/\langle 1 + 2T + T^2 \rangle$

Bibliografia

1. Andreas Blass *Seven Trees in One*, arXiv:math/9405205
2. Marcelo Fiore, Tom Leinster *Objects of Categories as Complex Numbers*, arXiv:math/0212377