Zabranianie podgrafów

Bartosz Wodziński

June 9, 2021

Zabranianie trójkątów

Twierdzenie Mantela

Każdy graf, niezawierający Δ ma co najwyżej $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ krawędzi.

Dowód

- Niech $G = (V, E)$. Ponieważ G nie zawiera trójkątów, sąsiedztwo wierzchołka x: $N(x)$ jest zbiorem niezależnym dla każdego x.
- Niech $A \subseteq V$ - maksymalny zbiór niezależny w G.
- $d(x) \leq |A| \ \forall x$
- Niech $B = V \setminus A$. Ponieważ A nie zawiera żadnych krawędzi, każda krawędź z G musi dotykać zbioru B: albo jest to krawędź z B do A, albo wewnątrz B.

Zabranianie trójkątów

Dowód - c.d.

- Mamy zatem:

  $$|E| \leq \sum_{x \in B} d(x) \leq |A||B| \leq \left\lfloor \left(\frac{|A|+|B|}{2} \right)^2 \right\rfloor = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$$

Przykład grafu realizującego maksimum

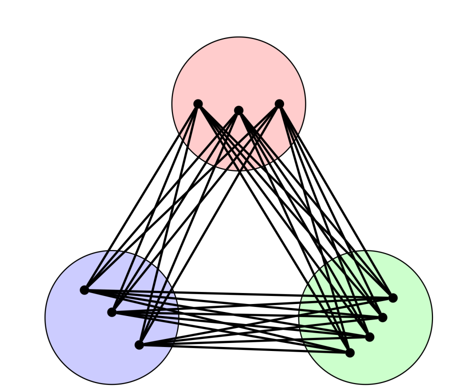
Graf dwudzielny o zbiorach wierzchołków równych rozmiarów (± 1) z wszystkimi możliwymi krawędziami.

Zabranianie klik

$T_{n,r}$

Niech $T_{n,r}$ oznacza pełny n - wierzchołkowy graf r - dzielny z częściami wielkości $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ lub $\lceil \frac{n}{r} \rceil$.

$T_{10,3}$



Zabranianie klik

Twierdzenie Turána

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach, niezawierającym K_{r+1}.
Wówczas $e(G) \leq e(T_{n,r})$,
gdzie $e(A)$ oznacza ilość krawędzi w grafie A.
W szczególności, dla $r = 2$ dostajemy twierdzenie Mantela.

Dowód

- Indukcja. Zauważmy, że jeśli $n \leq r$, to teza w oczywisty sposób zachodzi. Zakładamy więc, że $n > r$.
- Niech G będzie grafem z największą możliwą ilością krawędzi, niezawierającym K_{r+1}.

Zabranianie klik

Dowód - c.d

- Zauważmy, że $K_r \in G$.
- W przeciwnym przypadku dodanie krawędzi do G nie stworzyłoby K_{r+1} w G (powiedzmy, że dodajemy (a, b); jeśli po jej dodaniu powstała K_{r+1}, to znaczy, że zarówno a jak i b musi należeć do tej kliki i być połączony z wszystkimi jej wierzchołkami; to oznacza, że przed dodaniem (a, b), należały już one do K_r).
- Niech A będzie zbiorem wierzchołków kliki K_r z G i niech $B = V \setminus A$.
- Ponieważ $K_{r+1} \notin G$, każdy $v \in B$ ma co najwyżej $r - 1$ sąsiadów w A.

Zabranianie klik

Dowód - c.d.

- Zatem:
  $e(G) \leq \binom{r}{2} + (r-1)|B| + e(B) \leq$
  $\leq \binom{r}{2} + (r-1)(n-r) + e(T_{n-r,r}) = e(T_{n,r})$.
- Pierwsza nierówność to suma krawędzi w A, między A i B i w B.
- Druga zachodzi z założenia indukcyjnego, dla B.
- Ostatnia równość zachodzi, bo gdy usuniemy po 1 wierzchołku z każdej części $T_{n,r}$, usuniemy $\binom{r}{2} + (r-1)(n-r)$ krawędzi.
- $\binom{r}{2}$ to krawędzie między wierzchołkami usuwanymi.
- Dla każdego usuniętego x, ilość krawędzi do pozostałych (nieusuniętych) wierzchołków to $n - \frac{n}{r} - (r-1)$, więc sumarycznie $rn - n - r^2 + r = (r-1)(n-r)$.

Uogólnienie dla hipergrafów

Jaka jest maksymalna ilość krawędzi w n wierzchołkowym 3 - regularnym (każda krawędź zawiera dokładnie 3 wierzchołki) hipergrafie, który nie zawiera czworościanu?

Czworościan

Przez "czworościan" w hipergrafie rozumiemy 4 wierzchołki $\{x, y, z, t\}$ połączone krawędziami, które są trójkami z tego zbioru; innymi słowy, te krawędzie to $(x, y, z), (x, z, t), (x, y, t), (y, z, t)$.

Problem jest otwarty. Znamy ograniczenia z góry i z dołu na ilość krawędzi w stosunku do maksymalnej możliwej; odpowiednio 0.555 i 0.562.

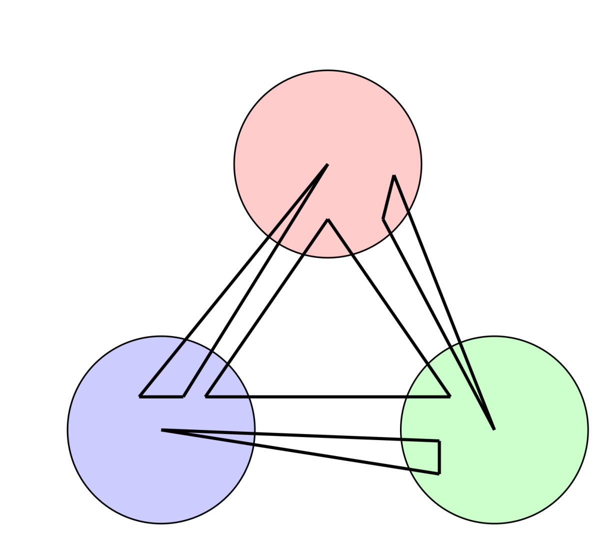
Zabranianie czworościanu - ograniczenie z dołu

Ograniczenie z dołu

Prosta konstrukcja: dzielimy wierzchołki na zbiory równej wielkości (V_1, V_2, V_3) i dodajemy krawędzie (x, y, z) jeśli:

- x, y, z są w różnych częściach
- $x, y \in V_1$ i $z \in V_2$
- $x, y \in V_2$ i $z \in V_3$
- $x, y \in V_3$ i $z \in V_1$

Konstrukcja



Zabranianie dowolnych podgrafów

Jak dużo krawędzi może mieć G jeśli nie zawiera H jako podgrafu?

- Załóżmy, że G ma n wierzchołków i niech $ex(n, H)$ oznacza największą możliwą ilość krawędzi w G pod warunkiem, że nie zawiera H.
- Z poprzednich twierdzeń wiemy, że $ex(n, K_{r+1}) = e(T_{n,r}) = (1 - \frac{1}{r} + o(1))\binom{n}{2}$.
- Niech $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną grafu G.
- Możemy łatwo oszacować $ex(n, H)$ z dołu zauważając, że jeśli $H \subseteq G$, to $\chi(H) \leq \chi(G)$.
- Wówczas jeśli $\chi(H) = r + 1$, to $T_{n,r}$ nie zawiera H.
- Zatem $ex(n, H) \geq e(T_{n,r}) = (1 - \frac{1}{r} + o(1))\binom{n}{2}$, dla $r + 1 = \chi(H)$.
- Czy można lepiej?

Zabranianie dowolnych podgrafów

Twierdzenie (Erdős–Stone–Simonovits)

Dla każdego grafu H mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}.$$

Dowód

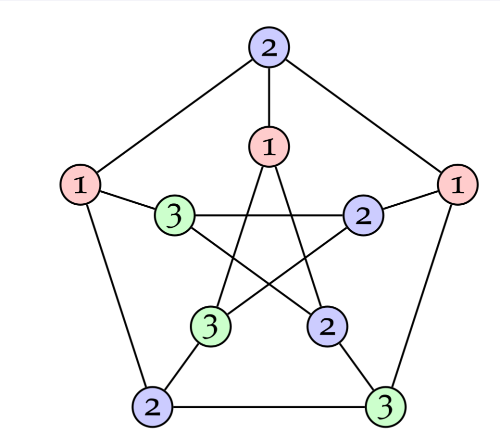
- Skomplikowany; używa lematu Szemerédiego o regularności.

Wnioski

- Dla $H = K_3 = \Delta$: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}}\right) = \frac{1}{2}$.
- Dla $H = K_4$: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}}\right) = \frac{2}{3}$.
- Dla H - grafu Petersena: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

Zabranianie dowolnych podgrafów

Pokolorowany graf Petersena



Zabranianie podgrafów dwudzielnych

Szacowana ilość krawędzi bez podgrafu dwudzielnego

- Powyższe twierdzenie niewiele nam mówi o maksymalnej ilości krawędzi w przypadku kiedy H jest dwudzielny. Dostajemy tylko, że wynosi on $o(n^2)$, czyli prawie nic.
- Ustalenie dokładniejszego wyniku (czyli jak ma się on do n) jest problemem otwartym.
- Możemy starać się uzyskać pewne przybliżenie rozważając pełne grafy dwudzielne - jeśli G nie zawiera grafu dwudzielnego, to nie zawiera też tego grafu z dodanymi krawędziami.
- Zatem, niech $K_{s,t}$ będzie pełnym grafem dwudzielnym o zbiorach wierzchołków wielkości s i t.

Zabranianie pełnych grafów dwudzielnych

Problem Zarankiewicza

Niech G nie zawiera $K_{s,t}$ jako podgrafu. Jaką maksymalną ilość krawędzi może mieć G?

Komentarz

- Jest to problem otwarty.
- Znane jest oszacowanie z góry (Kővári–Sós–Turán, 1954 - twierdzenie KST): jeśli $1 \leq s \leq t$, to $ex(n, K_{s,t}) \leq Cn^{2-\frac{1}{s}}$ dla pewnej stałej C.

Zabranianie pełnych grafów dwudzielnych - zastosowania

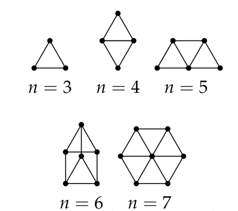
Problem "unit distance"

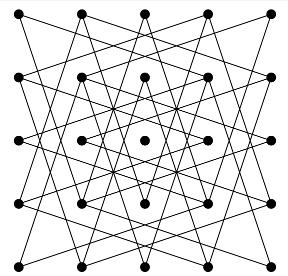
Mamy zbiór punktów na płaszczyźnie. Ile może być maksymalnie par punktów oddalonych od siebie o 1?

Komentarz

- Nie jest znany wynik dla dowolnego n. Znamy wyniki dla małych n. Przykładowe optymalne konfiguracje na następnym slajdzie.
- Najlepsze znane ograniczenie z dołu wynosi $n^{1+\frac{c}{\log\log n}}$ i pochodzi od Erdősa z 1946r (krata $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ odpowiednio przeskalowana).
- Najlepsze ograniczenie z góry wynosi $O(n^{\frac{4}{3}})$.

Przykłady

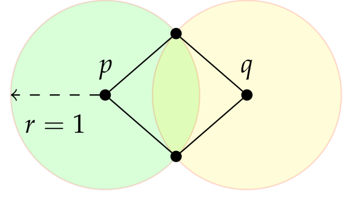




Zabranianie pełnych grafów dwudzielnych - zastosowania

Powiązanie z zabranianiem podgrafów dwudzielnych

- Niech zbiór punktów na płaszczyźnie będzie zbiorem wierzchołków grafu G, a krawędzie będą między $(x, y) \iff d(x, y) = 1$.
- W G nie ma $K_{2,3}$.



- Dzięki temu możemy zastosować twierdzenie KST i otrzymać, że $e(G) = O(n^{\frac{3}{2}})$ - gorsze oszacowanie niż najlepsze znane, ale ciągle dobre.

Zabranianie pełnych grafów dwudzielnych - zastosowania

Problem "Point-line incidences"

Mamy zbiór $P : |P| = m$ punktów na płaszczyźnie, zbiór $L : |L| = n$ prostych.
Jaka jest maksymalna ilość par $(p \in P, l \in L)$ takich, że p leży na l?

Komentarz

- Trywialne ograniczenie z góry: mn.
- Optymalne ograniczenie z góry: $O(m^{\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}} + m + n)$ - Twierdzenie Szemerediego - Trottera.
- Pokażemy słabsze ograniczenie wynikające z twierdzenia KST.

"Point-line incidences" - komentarz

- Tworzymy graf dwudzielny z osobnym zbiorem wierzchołków dla punktów i osobnym dla prostych.
- Krawędź (p, l) jest gdy p leży na l.
- Zatem ilość par prostych / punktów takich, że punkt leży na prostej to ilość krawędzi w tym grafie.
- Nie zawiera on $K_{2,2}$, bo 2 punkty definiują prostą, a proste muszą być różne od siebie.
- Zatem twierdzenie KST daje nam ograniczenie: $e(G) \leq C(n+m)^{\frac{3}{2}}$.

Źródła

Referat na podstawie

- https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-217-graph-theory-and-additive-combinatorics-fall-2019/lecture-notes/MIT18_217F19_ch2.pdf
- https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-4613-0039-7_4