On an early paper of Maryam Mirzakhani

Wojciech Buczek

Uniwersytet Jagielloński

2022-04-12

Maryam Mirzakhani

Maryam Mirzakhani (1977-2017) – irańska matematyczka. Zajmowała się przestrzenią Teichmüllera, geometrią hiperboliczną, teorią ergodyczną i geometrię symplektyczą.

Maryam Mirzakhani

Maryam Mirzakhani (1977-2017) – irańska matematyczka. Zajmowała się przestrzenią Teichmüllera, geometrią hiperboliczną, teorią ergodyczną i geometrię symplektyczą. Jako pierwsza kobieta w historii została uhonorowana Medalem Fieldsa (2014).

Maryam Mirzakhani

Maryam Mirzakhani (1977-2017) – irańska matematyczka. Zajmowała się przestrzenią Teichmüllera, geometrią hiperboliczną, teorią ergodyczną i geometrię symplektyczą. Jako pierwsza kobieta w historii została uhonorowana Medalem Fieldsa (2014).

"*Za jej wybitny wkład w dynamikę i geometrię powierzchni Riemanna i ich przestrzeni modularnych.*"

Maryam Mirzakhani (1977-2017) – irańska matematyczka. Zajmowała się przestrzenią Teichmüllera, geometrią hiperboliczną, teorią ergodyczną i geometrię symplektyczą. Jako pierwsza kobieta w historii została uhonorowana Medalem Fieldsa (2014).

"*Za jej wybitny wkład w dynamikę i geometrię powierzchni Riemanna i ich przestrzeni modularnych.*"

"*...jej spostrzeżenia mają połączone metody z różnych dziedzin, takich jak geometria algebraiczna, topologia i teoria prawdopodobieństwa*"

Maryam Mirzakhani

Maryam Mirzakhani (1977-2017) – irańska matematyczka. Zajmowała się przestrzenią Teichmüllera, geometrią hiperboliczną, teorią ergodyczną i geometrię symplektyczą. Jako pierwsza kobieta w historii została uhonorowana Medalem Fieldsa (2014).

"*Za jej wybitny wkład w dynamikę i geometrię powierzchni Riemanna i ich przestrzeni modularnych.*"

"*...jej spostrzeżenia mają połączone metody z różnych dziedzin, takich jak geometria algebraiczna, topologia i teoria prawdopodobieństwa*"

Była również pierwszą irańską matematyczką dostającą to wyróżnienie.

W 1994 oraz 1995 dostała złote medale na IMO.

Maryam Mirzakhani

W 1994 oraz 1995 dostała złote medale na IMO. W 1999 roku skończyła licencjat na *Sharif University of Technology*.

Maryam Mirzakhani

W 1994 oraz 1995 dostała złote medale na IMO. W 1999 roku skończyła licencjat na *Sharif University of Technology*. W 2004 roku skończyła doktorat na Harvardzie (jej promotorem był Curtis T. McMullen)

Maryam Mirzakhani

W 1994 oraz 1995 dostała złote medale na IMO. W 1999 roku skończyła licencjat na *Sharif University of Technology*. W 2004 roku skończyła doktorat na Harvardzie (jej promotorem był Curtis T. McMullen)

Po obronieniu się, została profesorem na Stanford University.

W 1996 roku Mirzakhani opublikowała pracę pt. “A small non-4-choosable planar graph”

W 1996 roku Mirzakhani opublikowała pracę pt. “A small non-4-choosable planar graph”

Small?

W 1996 roku Mirzakhani opublikowała pracę pt. “A small non-4-choosable planar graph”

Small?

Margit Voigt pokazała w 1993 roku, że istnieje graf planarny, który nie jest 4-choosable.

W 1996 roku Mirzakhani opublikowała pracę pt. “A small non-4-choosable planar graph”

Small?

Margit Voigt pokazała w 1993 roku, że istnieje graf planarny, który nie jest 4-choosable. Miał 238 wierzchołków.

Maryam Mirzakhani

W 1996 roku Mirzakhani opublikowała pracę pt. “A small non-4-choosable planar graph”

Small?

Margit Voigt pokazała w 1993 roku, że istnieje graf planarny, który nie jest 4-choosable. Miał 238 wierzchołków.

Maryam Mirzakhani zmniejszyła ilość wierzchołków do 63.

W 1996 roku Mirzakhani opublikowała pracę pt. “A small non-4-choosable planar graph”

Small?

Margit Voigt pokazała w 1993 roku, że istnieje graf planarny, który nie jest 4-choosable. Miał 238 wierzchołków.

Maryam Mirzakhani zmniejszyła ilość wierzchołków do 63. Dodatkowo, jej graf jest 3-kolorowalny. Istnieje więc planarny graf 3-kolorowalny, który nie jest 4-choosable, co falsyfikuje hipotezę Jensena, który twierdził, że każdy planarny graf 3-kolorowalny jest 4-choosable z list.

Kolorowanie grafu z list

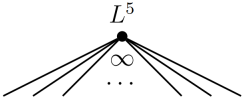
$G = (V, E)$. Kolorowanie grafu G z kolorami ze zbioru C jest funkcją $c : V \to C$, gdzie $c(u) \neq c(v)$ jeśli uv jest krawędzią w G. Graf G jest k-kolorowalny, jeśli istnieje kolorowanie G w zbiór C rozmiaru k.

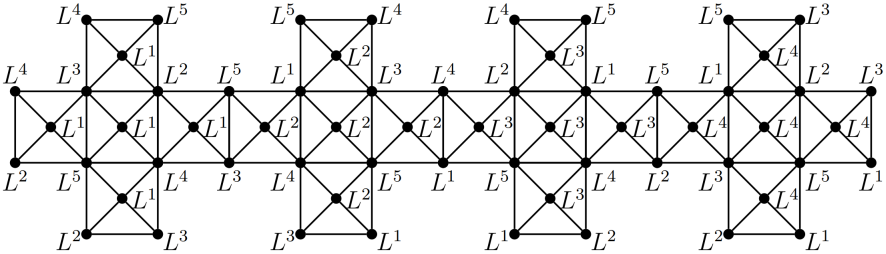
Kolorowanie grafu z list

$G = (V, E)$. Kolorowanie grafu G z kolorami ze zbioru C jest funkcją $c : V \to C$, gdzie $c(u) \neq c(v)$ jeśli uv jest krawędzią w G. Graf G jest k-kolorowalny, jeśli istnieje kolorowanie G w zbiór C rozmiaru k.

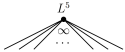
Jeśli pozdbiór L_u zbioru C jest sprecyzowany dla każdego $u \in V$, to poprawne kolorowanie z list G w odniesieniu do list $\{L_u\}u \in V$ jest kolorowaniem grafu $c : V \to \cup_u L_u$ spełniające $c(u) \in L_u$. Graf nazywamy k-wybieralnym, jeśli takie kolorowanie istnieje dla dowolnego wyboru list $\{L_u\}_{u \in V}$, takich, że $|L_u| = k$. Liczba wyborów to najmniejsze k, dla którego G jest k-wybieralny.

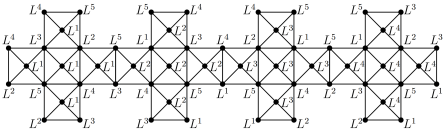
Przykład Mirzakhani





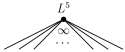
Przykład Mirzakhani

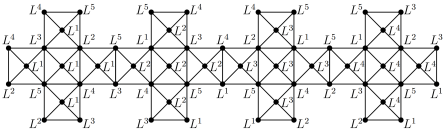




Wierzchołek, oznaczony ∞, ma stopień 42 i jest połączony do wszystkich 'zewnętrznych' wierzchołków grafu dolnego.

Przykład Mirzakhani

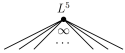


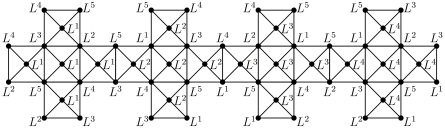


Wierzchołek, oznaczony ∞, ma stopień 42 i jest połączony do wszystkich 'zewnętrznych' wierzchołków grafu dolnego.

Wierzchołki o stopniu 4 nazywamy **hubami**.

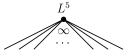
Przykład Mirzakhani

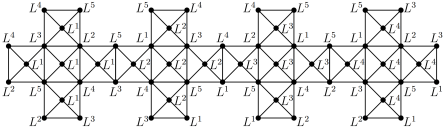




Lista kolorów każdego wierzchołka jest podzbiorem $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Przez L^j będziemy oznaczać zbiór $C - \{j\}$.

Przykład Mirzakhani

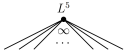


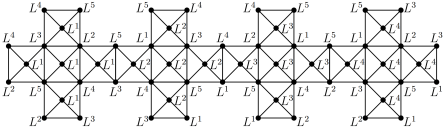


Lista kolorów każdego wierzchołka jest podzbiorem $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Przez L^j będziemy oznaczać zbiór $C - \{j\}$.

Każdy z 4 hubów (w jednym 'plusie') ma dokładnie 1, ten sam kolor zabroniony - ten kolor różni się w zależności od plusa (L^1, L^2, L^3, L^4).

Przykład Mirzakhani



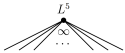


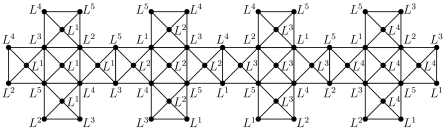
Lista kolorów każdego wierzchołka jest podzbiorem $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Przez L^j będziemy oznaczać zbiór $C - \{j\}$.

Każdy z 4 hubów (w jednym 'plusie') ma dokładnie 1, ten sam kolor zabroniony - ten kolor różni się w zależności od plusa (L^1, L^2, L^3, L^4).

Jeżeli usuniemy 20 hubów oraz wierzchołek ∞, zostaje nam cykl wielkości 42 (z dodatkowymi krawędziami w śrdoku).

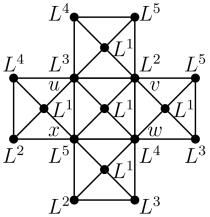
Przykład Mirzakhani

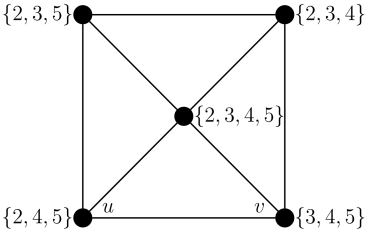




Możemy zauważyć, że ten cykl jest 2-kolorowalny. Cały nasz graf jest więc 3-kolorowalny.

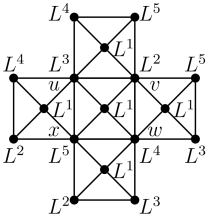
Przykład Mirzakhani

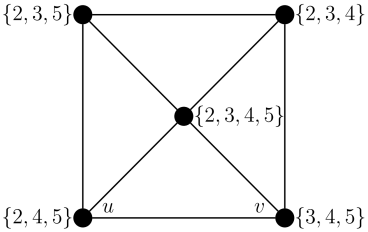




Pokażemy, że któryś wierzchołek na ścianie zewnętrznej musi użyć koloru 1.

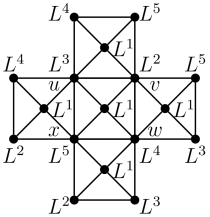
Przykład Mirzakhani

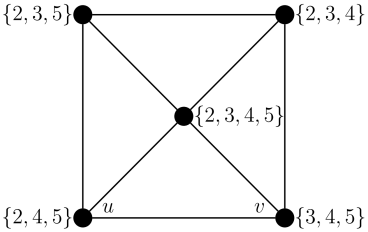




Pokażemy, że któryś wierzchołek na ścianie zewnętrznej musi użyć koloru 1. Załóżmy, że nie. Wtedy wszystkie listy na ścianie zewnętrznej redukują się do rozmiaru 3.

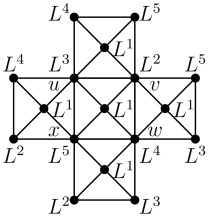
Przykład Mirzakhani

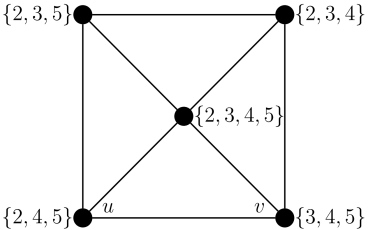




Pokażemy, że któryś wierzchołek na ścianie zewnętrznej musi użyć koloru 1. Załóżmy, że nie. Wtedy wszystkie listy na ścianie zewnętrznej redukują się do rozmiaru 3. Na prawym grafie mamy wtedy zaznaczony górny kwadrat, z listami do kolorowania.

Przykład Mirzakhani

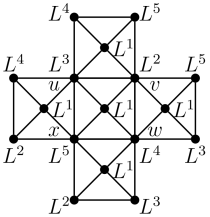


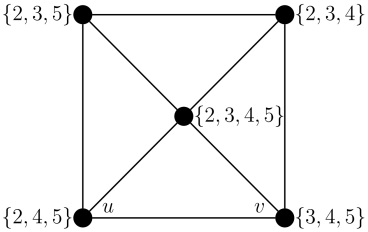


Pokażemy, że któryś wierzchołek na ścianie zewnętrznej musi użyć koloru 1. Załóżmy, że nie. Wtedy wszystkie listy na ścianie zewnętrznej redukują się do rozmiaru 3. Na prawym grafie mamy wtedy zaznaczony górny kwadrat, z listami do kolorowania.

Zauważmy, że jeśli wierzchołkowi u wybierzemy kolor 5 (kolor, którego nie ma w liście wierzchołek naprzeciwko), to wierzchołek v musi dostać kolor 3.

Przykład Mirzakhani

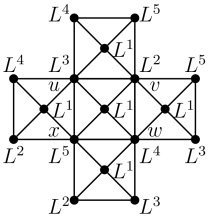


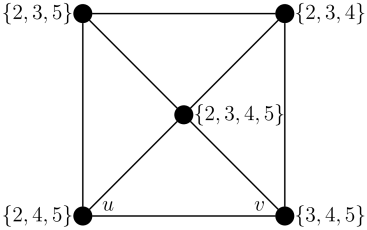


Pokażemy, że któryś wierzchołek na ścianie zewnętrznej musi użyć koloru 1. Załóżmy, że nie. Wtedy wszystkie listy na ścianie zewnętrznej redukują się do rozmiaru 3. Na prawym grafie mamy wtedy zaznaczony górny kwadrat, z listami do kolorowania.

Zauważmy, że jeśli wierzchołkowi u wybierzemy kolor 5 (kolor, którego nie ma w liście wierzchołek naprzeciwko), to wierzchołek v musi dostać kolor 3. Podobnie, jeśli wierzchołkowi v wybierzemy kolor 4, to u musi dostać kolor 2.

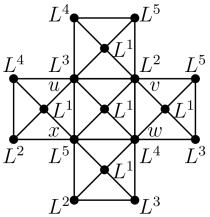
Przykład Mirzakhani

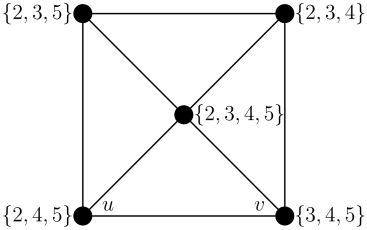




Symetrycznie, sytuacja jest podobna dla prawego, dolnego i lewego kwadratu. Wybierając wierzchołkowi kolor, którego nie ma liście, forsujemy kolor wszystkich wierzchołków w środkowym kwadracie.

Przykład Mirzakhani



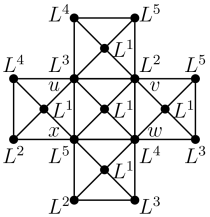


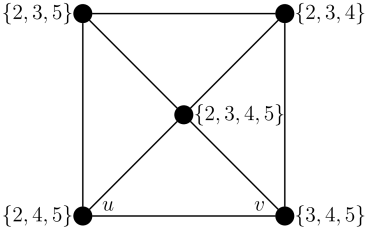
Symetrycznie, sytuacja jest podobna dla prawego, dolnego i lewego kwadratu. Wybierając wierzchołkowi kolor, którego nie ma liście, forsujemy kolor wszystkich wierzchołków w środkowym kwadracie.

Mamy więc, że:

$c(u) = 5 \implies c(v) = 3 \implies c(w) = 2 \implies c(x) = 4 \implies c(u) = 5$

Przykład Mirzakhani





Symetrycznie, sytuacja jest podobna dla prawego, dolnego i lewego kwadratu. Wybierając wierzchołkowi kolor, którego nie ma liście, forsujemy kolor wszystkich wierzchołków w środkowym kwadracie.

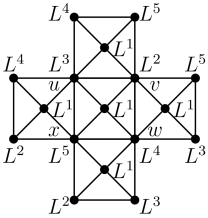
Mamy więc, że:

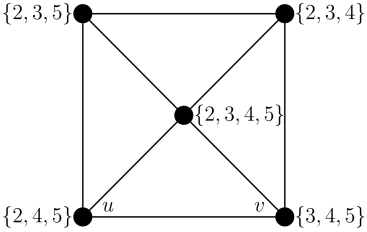
$c(u) = 5 \implies c(v) = 3 \implies c(w) = 2 \implies c(x) = 4 \implies c(u) = 5$

oraz

$c(v) = 4 \implies c(u) = 2 \implies c(x) = 3 \implies c(w) = 5 \implies c(v) = 4$

Przykład Mirzakhani





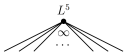
$$c(u) = 5 \implies c(v) = 3 \implies c(w) = 2 \implies c(x) = 4 \implies c(u) = 5 \text{ oraz}$$
$$c(v) = 4 \implies c(u) = 2 \implies c(x) = 3 \implies c(w) = 5 \implies c(v) = 4$$

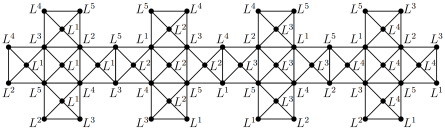
Zostaje nam jedna możliwość:

$$c(u) = 4 \qquad c(v) = 5 \qquad c(w) = 3 \qquad c(x) = 2$$

Wszystkie możliwości nie zostawiają środkowemu hubowi koloru. Sprzeczność.

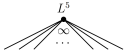
Przykład Mirzakhani

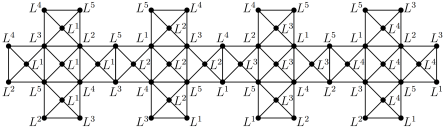




Kopujemy plusa 4 razy, zmieniając zabroniony kolor huba w każdym plusie.

Przykład Mirzakhani





Kopujemy plusa 4 razy, zmieniając zabroniony kolor huba w każdym plusie.

Będziemy mieć więc 1 na zewnętrznej ścianie pierwszego plusa, 2 na na zewnętrznej ścianie drugiego plusa itd.

Wierzchołek ∞ nie może więc dostać koloru ze zbioru $L^5 = \{1, 2, 3, 4\}$, sprzeczność.

Historia

(zdjęcie wykonane przez Ebad Mahmoodian, 1995, Olimpiada Matematyczna w Yazd)

Saieed Akbari był trenerem *Iranian Mathematics Olympiad team* przez osiem lat - Mirzakhani była jedną z jego uczennic. Zadał uczniom problem znalezienia grafu planarnego, który nie jest 4-wybieralny, w nagrodę oferując 10$.

Dziękuję za uwagę